Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Л. В. РАБЧУК, М. Т. ХАТМУЛЛИНА

МЕХАНИКА

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Допущено Редакционно-издательским советом УГАТУ
в качестве лабораторного практикума для студентов
очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Физика»

Учебное электронное издание локального доступа

ISBN 978-5-4221-1270-8

Уфа 2019

УДК 534(07)
ББК 22.3я7

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук доцент З. А. Ягафарова;
канд. физ.-мат. наук В. И. Ткачев

Рабчук Л. В., Хатмуллина М. Т.

Механика. Механические колебания и волны : лабораторный практикум [Электронный ресурс] / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа : РИК УГАТУ, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) ; 14 см. – Систем. требования : процессор с частотой 1,5 ГГц и выше ; 1 Гб ОЗУ и выше ; Microsoft Windows XP/7/8 ; Internet Explorer 7/8/9 ; оптический привод CD/DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Предназначен для ознакомления студентов с физическими явлениями и законами, приобретения навыков работы с измерительными приборами, овладения умением обрабатывать и анализировать экспериментальные данные. Содержит описания лабораторных работ по разделу «Механика. Механические колебания и волны», включающие в себя цели и задачи, краткие сведения, требования по технике безопасности, задания, методические рекомендации выполнения работы и оформления отчета, критерии результативности и контрольные вопросы для закрепления изученного материала.

Предназначен для студентов очной и заочной форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров/специалистов факультетов «Авиационных двигателей, энергетики и транспорта», «Авионики, энергетики и инфокоммуникаций», «Защиты в чрезвычайных ситуациях», «Информатики и робототехники», общенаучного факультета и института авиационных технологий и материалов.

Минимальные системные требования:
Процессор с частотой 1 ГГц; 512 Мб ОЗУ; Microsoft Windows XP;
Internet Explorer 6; оптический привод CD-ROM.

© РИК УГАТУ, 2019

При подготовке электронного издания использовались следующие программные средства:

- Adobe Acrobat– текстовый редактор;
- Microsoft Word – текстовый редактор;

Авторы: Рабчук Людмила Васильевна, Хатмуллина Маргарита Талгатовна

Редактирование и верстка: *О. А. Соколова*
Программирование и компьютерный дизайн: *А. П. Меркулова*

Объем 4,62 Мб
1 оптический компакт-диск (CD-ROM)

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»
Редакционно-издательский комплекс УГАТУ
450008, Уфа, ул. К. Маркса, 12.
Тел.: (347) 272-11-67
e-mail: rik.ugatu@yandex.ru

Все права на размножение, распространение в любой форме остаются за разработчиком.
Нелегальное копирование, использование данного продукта запрещено.

ВВЕДЕНИЕ

Цель лабораторного практикума – закрепление и совершенствование знаний студентов по дисциплине «Физика» и формирование умений применять их для решения научно-технических задач в теоретических и прикладных аспектах, возникающих в последующей профессиональной деятельности выпускников технического университета.

Одной из важных физических характеристик любого макроскопического или микроскопического движущегося тела, а также волн различной природы является скорость (величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения тела (волны) относительно выбранной системы отсчета). Классическая или ньютоновская механика рассматривает закономерности движения тел со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме. Закономерности движения тел со скоростями, близкими к скорости света в вакууме, являются предметом релятивистской механики, а закономерности движения микрочастиц (электронов в атомах, молекулах, кристаллах и т.д.) – квантовой механики.

Скорость света в вакууме является максимальной скоростью движения частиц и распространения взаимодействий. Она одинакова во всех инерциальных системах отсчета и равна 299792458 м/с или 1079252848,8 км/ч. Улитка в среднем движется со скоростью 1,5 мм/с или 5,4 м/ч. Пешеход двигается со скоростью от 2 до 8 км/ч, а максимальная скорость самого быстрого человека на планете Усейна Болта равна 44,72 км/ч. Начальная скорость пули при стрельбе из пистолета Макарова равна 320 м/с, из пистолета Beretta 92 KWC – 955 м/с, из автомата Калашникова АК-108 910 м/с. Рекорд скорости полета шайбы в хоккее составляет 190,4 км/ч. Максимальная скорость самолета Boeing 747-400ER достигает 988 км/ч, а самолета Су-27 – 2500 км/ч. Самая высокая скорость в мире на наземном управляемом транспортном средстве была показана на реактивном автомобиле Thrust SSC и составила 1227,986 км/ч. Скорость распространения звуковых волн в воздухе при нормальных условиях (на уровне моря при температуре 0 ºС) равна 331 м/с. В бетатроне электроны можно ускорить до скоростей,

близких к скорости света в вакууме (0,9995 *c*, где *c* – скорость света в вакууме).

Лабораторные работы № 2 и № 102 знакомят студентов с методикой определения скорости полета пули с помощью крутильного баллистического маятника и унифилярного подвеса. Данные работы способствуют пониманию, усвоению и умению применять фундаментальные законы физики (закон сохранения момента импульса и закон сохранения механической энергии) для решения практических задач.

Механика изучает закономерности механического движения, под которым понимают изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве. В кинематике изучают характеристики и законы механического движения, не рассматривая причины, вызывающие то или иное движение. Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение. В лабораторной работе № 6 с помощью машины Атвуда проверяются основные законы кинематики и динамики поступательного движения.

В работе № 9 определяется ускорение свободного падения с помощью математического и физического маятников, сравниваются экспериментально полученные значения ускорения свободного падения с известным значением ускорения свободного падения для данной местности.

Лабораторная работа № 12 посвящена определению ускорения силы тяжести при свободном падении тела, а также знакомит студентов с силами инерции. В лабораторной работе № 107 изучается движение тела брошенного под углом к горизонту в вязкой среде в неинерциальной системе отсчета (Земля).

Ударом (соударением) называют кратковременное взаимодействие тел при столкновении. Промежуток времени, в течение которого длится удар, обычно составляет 10^{-5}–10^{-6} с. Например, попадание пули в мишень, столкновение шаров, удар молота о наковальню и т.д. Удар часто используют в технике для изменения формы изделия (ковка, штамповка, клепка) или для перемещения тел в среде с большим сопротивлением (забивание свай, дюбелей). В лабораторной работе № 7 изучается выполнение закона сохранения импульса в случае столкновения двух шаров, рассчитываются потери механической энергии при соударении, определяется средняя сила,

с которой шары действуют друг на друга во время удара. В работе № 107 законы сохранения импульса и энергии изучаются при центральном ударе двух кареток Флетчера, рассчитываются коэффициенты восстановления скорости и энергии.

Движение твердого тела можно представить как результат суперпозиции поступательного и вращательного движений. При поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям, поэтому поступательное движение твердого тела описывается теми же уравнениями, что и движение любой материальной точки этого тела. Поступательно движутся относительно Земли тело малого размера, брошенное под углом к горизонту, движущийся на автостраде автомобиль, резец токарного станка и т.д. При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Такое движение относительно Земли совершают различные роторы турбин, электромоторов и генераторов, установленных на Земле неподвижно. При изучении динамики вращательного движения используются такие физические величины, как момент импульса, момент силы, момент инерции.

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Он зависит от массы тела и распределения ее относительно оси вращения. Момент инерции тел правильной геометрической формы можно рассчитать теоретически. Для неоднородных твердых тел произвольной формы такой расчет сложен, поэтому моменты инерции тел определяют опытным путем.

Имеются различные методы экспериментального определения моментов инерции, основанные на применении к вращающемуся телу основного закона динамики вращательного движения или закона сохранения энергии.

Лабораторные работы № 1, № 4, № 101 посвящены усвоению понятия момента инерции твердого тела относительно оси. В работе № 1 с помощью трифилярного подвеса определяются моменты инерции сплошного цилиндра и параллелепипеда относительно различных осей. В работах № 4 и № 101 с использованием метода крутильных колебаний определяются соответственно моменты инерции параллепипеда и сплошного диска относительно различных осей. В работах № 1 и № 101 также экспериментально проверяется теорема Штейнера.

В лабораторной работе № 5 определяются моменты инерции математического и физического маятников, изучается зависимость момента инерции тела произвольной формы от распределения массы относительно оси вращения.

Лабораторная работа № 3 посвящена изучению и экспериментальному подтверждению основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека.

В работе № 13 экспериментально проверяется выполнение закона сохранения механической энергии с помощью маятника Максвелла. Закон сохранения энергии является фундаментальным законом природы, он применим как в физике элементарных частиц, так и в астрофизике.

Колебательным движением (колебанием) называют движение, точно или приблизительно повторяющееся через одинаковые промежутки времени. Это определение объединяет множество непохожих на первый взгляд процессов: колебания различных маятников, движение планет вокруг Солнца, движение поршня в двигателе внутреннего сгорания, биение сердца, колебания струны, колебания напряжения между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника, смену времен года, колебания численности популяций животных, колебательные химические реакции.

Характеристики колебаний связаны с параметрами, определяющими состояние системы, поэтому, исследуя колебания, можно делать выводы о строении и свойствах различных систем. На этой идее основаны такие методы исследования вещества, как оптическая спектроскопия, акустическая спектроскопия, электронный парамагнитный резонанс, ядерный магнитный резонанс и т.д. Несмотря на огромное разнообразие колебательных процессов в природе и технике для их описания существует единый подход.

В лабораторной работе № 10 изучаются колебания пружинного маятника и определяются характеристики колебательного процесса (коэффициент жесткости пружины, логарифмический декремент затухания, коэффициент сопротивления воздуха).

При наложении в пространстве двух или нескольких волн одинаковой частоты с постоянной разностью фаз во времени в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей амплитуды колебаний в зависимости от соотношения между фазами волн. Это явление называется

интерференцией. Частным случаем интерференции волн являются стоячие волны. Стоячая волна образуется в результате наложения двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами. Примерами стоячей волны могут служить волны, возникающие в натянутой струне, в воздушном столбе в трубе ограниченной длины (духовых музыкальных инструментах), в воде вблизи вертикальных преград, например, плотин. В лабораторной работе №8 изучаются стоячие волны в трубе, и определяется скорость звука в воздухе, в работе № 11 рассматриваются стоячие волны в струне и находятся собственные частоты колебаний струны.

Лабораторный практикум разработан с использованием лабораторных работ, перечень которых указан в приложении.

Предлагаемый практикум предназначен для студентов, изучающих дисциплину «Физика» по разделу «Механика. Механические колебания и волны» дисциплины «Физика» на всех направлениях подготовки бакалавров и специалистов. В целях облегчения восприятия студентами информации в представленных лабораторных работах не использована сквозная нумерация формул, рисунков и таблиц.

В результате выполнения лабораторной работы формируются следующие **компетенции:**

– способность демонстрировать базовые знания в области общенаучных дисциплин и готовность использовать основные законы в профессиональной деятельности;

– способность проводить эксперименты по заданной методике, обрабатывать результаты, оценивать их погрешность и достоверность;

– способность сопоставлять экспериментальные данные с теоретическими положениями;

– способность оформлять, представлять и докладывать результаты выполненной работы;

– способность применять полученные теоретические знания в экспериментальной работе.

Перечисленные компетенции формируются через **умения:**

– работать с измерительными приборами;

– рассчитывать физические величины по экспериментальным данным;

– анализировать результаты опыта;

– оформлять отчет;

– использовать знания, полученные в опыте для подтверждения теоретических знаний.

Перечисленные компетенции формируются через **владения**:

– теоретическим материалом;

– навыками измерений физических величин по приборам;

– технологией графической обработки экспериментальных данных.

РАЗДЕЛ I. ПОДГОТОВКА К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ, ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

Выполнение каждой лабораторной работы состоит из пяти основных этапов:

1. Предварительная подготовка к работе.
2. Получение допуска к работе.
3. Выполнение лабораторной работы.
4. Оформление отчета.
5. Защита лабораторной работы.

Первый этап. При предварительной подготовке к лабораторной работе необходимо изучить теорию и методику работы по руководству к лабораторной работе, рекомендуемой литературе, лекциям.

В рабочую тетрадь записать:

– номер и название работы;
– цель и задачи;
– приборы и оборудование;
– краткую теорию по лабораторной работе;
– таблицы для записи результатов.

Второй этап. Получить допуск к работе. Для этого необходимо знать физические законы, используемые в лабораторной работе, иметь представление об исследуемом физическом явлении, знать методику измерений и ожидаемый характер зависимостей между измеряемыми физическими величинами. (Допуск сдается перед началом работы).

Третий этап. Выполнить измерения и записать результаты измерений в заготовленные на первом этапе таблицы в рабочую тетрадь.

Четвертый этап. После выполнения лабораторной работы студент обязан представить отчет, форма которого должна быть следующей:

1. Сведения о лабораторной работе:
– номер лабораторной работы;
– название лабораторной работы;
– цель и задачи работы;
– приборы и принадлежности.
2. Краткая теория по лабораторной работе.
3. Методика эксперимента:

– схема установки;

– расчетные формулы.

4. Результаты измерений:

– номер таблицы;

– таблица с указанием в графах физических величин, единиц их измерения, погрешностей полученных величин;

– расчет косвенных измерений.

5. Графическое представление результатов (если таковые имеются):

– указать физические величины, отложенные по осям координат, и единицы их измерения;

– построить график.

6. Оценка погрешностей:

– вывод расчетных формул для вычисления погрешностей косвенных измерений;

– вычисление погрешностей косвенных измерений.

7. Выводы:

– краткое изложение полученных результатов;

соответствие или несоответствие полученных результатов физическим законам, причины несоответствия;

– сравнение результатов со справочными данными.

Классификация видов измерений и источников погрешностей, алгоритмы оценки погрешностей прямых и косвенных измерений, дифференциальный и логарифмический методы расчета погрешностей, рекомендации по построению графиков и записи конечного результата изложены в учебном пособии В. В. Лазарева и Д. Ю. Васильева «Физические измерения и их обработка» (УГАТУ – Уфа, 2014. – 81 с.).

Пятый этап. Для успешной защиты лабораторной работы необходимо знать теорию исследуемого явления, давать ответы на контрольные вопросы, уметь объяснять методику проведенных измерений, продемонстрировать умение грамотно пользоваться приборами, которые применялись в работе, представить грамотно оформленный отчет.

РАЗДЕЛ II. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ «МЕХАНИКА. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

Лабораторная работа № 1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

1. ЦЕЛИ РАБОТЫ

1. Экспериментальное определение моментов инерции твердых тел.

2. Проверка теоремы Штейнера.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Механика твердого тела».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений и умения обработки получаемых при этом данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Моментом инерции материальной точки относительно оси называют произведение массы этой точки m_i на квадрат ее расстояния до оси r_i

$$J_i = m_i r_i^2 .$$

Моментом инерции тела относительно оси называют сумму моментов инерции материальных точек, из которых состоит это тело

$$J_i = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Представляя тело состоящим из сколько угодно малых частей объемом dV и массы dm, его момент инерции можно рассчитать интегрированием

$$J = \int_m r^2 dm ,$$

где r – расстояние от элемента тела объемом dV до оси, относительно которой рассчитывается момент инерции.

Так как $dm = \rho\, dV$, где ρ – плотность тела в данной области dV, то

$$J = \int_V \rho r^2 dV .$$

Если тело однородно, то для всех областей ρ одинаково, тогда момент инерции запишется

$$J = \rho \int_V r^2 dV.$$

Наиболее просто определяются моменты инерции тел правильной геометрической формы с равномерным распределением массы по объему.

Рассчитаем момент инерции сплошного однородного диска массы m и радиуса R относительно оси симметрии (рис. 1), перпендикулярной плоскости диска. Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr и радиуса r. Объем такого слоя равен $dV = h \cdot 2\pi r\, dr$, где h – толщина диска.

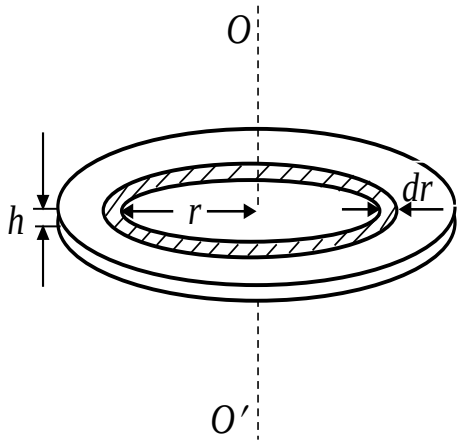

Рис. 1. Разбивка диска на кольцевые слои

Момент инерции диска получим равным

$$J = \rho \int_0^R r^2 \cdot h \cdot 2\pi r\, dr = \rho h \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}.$$

Масса диска m равна произведению его плотности ρ на объем $h \cdot \pi R^2$. Подставив

$$m = \rho h \pi R^2,$$

получаем

$$J = \frac{1}{2} m R^2. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что момент инерции сплошного однородного диска зависит только от его массы и радиуса и не зависит от толщины

диска. Поэтому формула (1) применима для расчета момента инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси симметрии.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции тела относительно любой параллельной оси можно определить, воспользовавшись теоремой Штейнера. Согласно теореме Штейнера, момент инерции J тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела J_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями

$$J = J_c + md^2.$$

Момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела при вращательном движении (мерой инертности тела при поступательном движении является его масса) и зависит не только от массы тела, но и от ее распределения в пространстве относительно оси. Тело обладает определенным моментом инерции относительно любой оси независимо от того, вращается оно или находится в покое.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

В настоящей работе моменты инерции твердых тел определяются с помощью трифилярного подвеса, представляющего собой диск радиуса R, подвешенный горизонтально на трех нитях длиной L к закрепленному диску меньшего радиуса r (рис. 2).

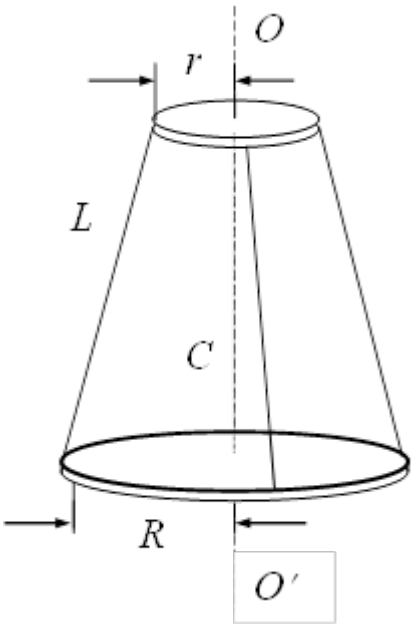

Рис. 2. Трифилярный подвес

Центры дисков расположены на одной вертикальной оси OO', вокруг которой нижний диск может совершать крутильные колебания. При колебаниях центр масс C диска радиуса R перемещается вдоль оси OO'. При повороте нижнего диска на угол φ вокруг оси OO' его перемещение равно h (рис. 3), а приращение потенциальной энергии

$$E_{\text{п}} = m\,g\,h,$$

где m – масса нижнего диска.

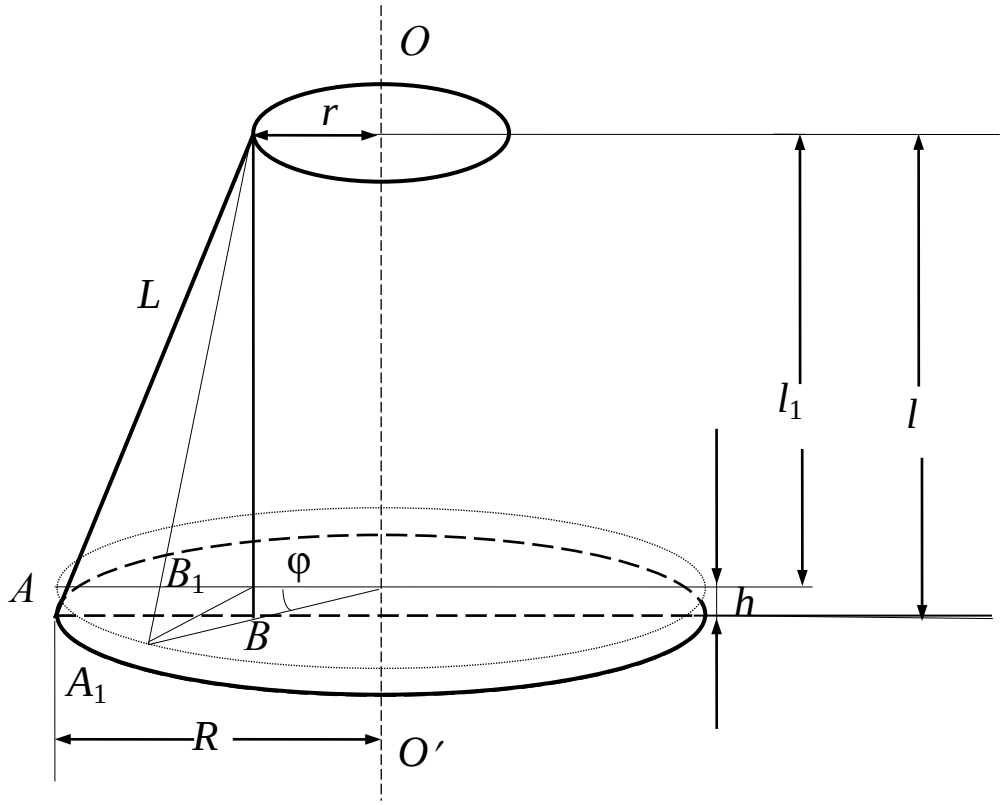

Рис. 3. Поворот нижнего диска на угол φ вокруг оси OO'

Колеблющийся диск совершает вращательное движение, поэтому его кинетическая энергия равна

$$E_{\text{к}} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции диска относительно оси OO', ω – угловая скорость диска.

При небольших смещениях диска по вертикали по сравнению с длиной нитей, т.е. при малых углах поворота, пренебрегая вязкостью воздуха можно показать, что диск совершает гармоническое колебательное движение, при котором угол φ его поворота изменяется со временем по закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t) = \varphi_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t),$$

где φ_0 – амплитуда углового смещения диска; T – период колебаний.

Изменение потенциальной энергии диска при максимальном угле поворота φ_0 равно максимальной кинетической энергии вращательного движения, которой он обладает в момент прохождения положения равновесия

$$m g h = \frac{J \omega_0^2}{2},$$

где ω_0 – угловая скорость диска в момент прохождения положения равновесия.

Отсюда момент инерции диска

$$J = \frac{2 m g h}{\omega_0^2}. \qquad (2)$$

Угловая скорость диска меняется по гармоническому закону

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos(\frac{2\pi}{T} t).$$

Следовательно, максимальная угловая скорость ω_0 равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \varphi_0. \qquad (3)$$

Высоту h, на которую поднимается диск, определим из геометрических соображений (рис. 3)

$$h = l - l_1 = \frac{l^2 - l_1^2}{l + l_1}, \qquad (4)$$

но

$$l^2 = L^2 - (R - r)^2,$$

$$l_1^2 = L^2 - (A_1 B_1)^2, \qquad (5)$$

$$l_1^2 = L^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi_0).$$

С учетом уравнений (5) уравнение (4) запишем в виде

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos\varphi_0)}{l + l_1} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{l + l_1}.$$

При малых углах φ_0

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2}, \text{ а } l + l_1 \approx 2l.$$

Таким образом,

$$h = \frac{R\,r\,\varphi_0^2}{2l}. \qquad (6)$$

Подставляя (3) и (6) в (2) получим

$$J = \frac{m\,g\,R\,r}{4\,\pi^2 l} T^2. \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно применять не только для расчета момента инерции диска J_0 относительно оси OO', но и для расчета момента инерции диска с грузами J. Момент инерции груза $J_{\text{гр}}$ можно найти

$$J_{\text{гр}} = J - J_0 . \qquad (8)$$

Это дает возможность определить моменты инерции грузов относительно оси вращения, измерив J и J_0.

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и лабораторной установкой.
2. Сообщите преподавателю или лаборанту о замеченных неисправностях.
3. Не загромождайте рабочее место предметами, не относящимися к выполняемой работе.
4. По окончании работы приведите в порядок свое рабочее место, обесточьте электросекундомер.

6. ЗАДАНИЯ

1. Определение момента инерции ненагруженного диска.
2. Определение момента инерции сплошного цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс тела.
3. Экспериментальная проверка теоремы Штейнера.
4. Проверка зависимости момента инерции от распределения массы тела относительно оси. (Задание выполняется по указанию преподавателя).

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Определение момента инерции ненагруженного диска

1. Измерить радиус R нижнего диска, радиус r верхнего диска и длину L нитей. Масса диска $m_0 = (0{,}8880 \pm 0{,}0001)$ кг.

2. Повернуть диск на угол 5–6 градусов вокруг оси OO' и измерить электросекундомером время 20 полных колебаний.

3. Повторить измерения еще 2 раза и результаты записать в табл. 1.

4. Определить среднее время 20 колебаний и рассчитать средний период колебаний T_0

$$T_0 = \frac{t_{0,\text{ср}}}{n},$$

где n – число колебаний.

5. По формуле (7) вычислить момент инерции ненагруженного диска.

6. Рассчитать относительную и абсолютную погрешности измерения момента инерции диска J_0.

Таблица 1

№	m_0, кг	R, м	r, м	l, м	t_0, с	$t_{0\,\text{ср}}$, с	T_0, с	J_0, кг·м^2	ΔJ_0, кг·м^2	ε, %
1 2 3										

Задание 2. Определение момента инерции сплошного цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс тела

1. Расположить исследуемое тело на диске так, чтобы его ось симметрии совпала с осью OO' (см. рис. 2).

2. Повернув диск на 5–6 градусов вокруг оси OO', 3 раза измерить время 20 полных колебаний.

3. Рассчитать среднее время и определить период колебаний T нагруженного диска

$$T = \frac{t_{\text{ср}}}{n}. \qquad (9)$$

4. По формуле (7) вычислить момент инерции J_{c1} системы, принимая массу m равной сумме масс исследуемого тела и диска.

5. По формуле (8) определить момент инерции J_1 цилиндра:

$$J_1 = J_{c1} - J_0.$$

6. Рассчитать абсолютную ΔJ_1 и относительную ε погрешности измерения момента инерции J_1 цилиндра.

7. Рассчитать момент инерции сплошного цилиндра относительно оси вращения, проходящей через его центр инерции, по формуле

$$J_{1\text{теор}} = \frac{1}{2} m_{\text{цил}} r^2,$$

где $m_{\text{цил}}$ – масса цилиндра; r – радиус цилиндра.

8. Сравнить значения момента инерции сплошного цилиндра, полученные экспериментально и теоретически.

9. Внести результаты измерений и расчетов в табл. 2.

Таблица 2

№	m, кг	$m_{\text{цил}}$, кг	t, с	$t_{\text{ср}}$, с	T, с	J_{c1}, кг·м^2	J_1, кг·м^2	ΔJ_1, кг·м^2	ε, %	$J_{1\text{теор}}$, кг·м^2
1 2 3										

Задание 3. Проверка теоремы Штейнера

1. Расположить строго симметрично на диске вдоль его диаметра два цилиндра.

2. Повернув диск с цилиндрами на 5–6 градусов вокруг оси OO', 3 раза измерить время 20 полных колебаний. По среднему времени по формуле (9) вычислить период колебаний нагруженного диска.

3. По формуле (7) рассчитать момент инерции J_{c2} системы, принимая массу m, равной массе диска и двух цилиндров $(m = m_0 + 2m_{\text{цил}})$.

4. Определить момент инерции J_2 одного цилиндра по формуле

$$J_2 = \frac{J_{c2} - J_0}{2}.$$

5. Рассчитать абсолютную ΔJ_2 и относительную погрешности ε измерения момента инерции J_2 цилиндра.

6. Вычислить теоретическое значение момента инерции цилиндра, расположенного на расстоянии d от оси вращения, по формуле

$$J_{2\,\text{теор}} = \frac{1}{2} m_{\text{цил}} r^2 + m_{\text{цил}} d^2,$$

где r – радиус цилиндра; $m_{\text{цил}}$ – масса цилиндра; d – расстояние от оси вращения до центра тяжести цилиндра.

7. Результаты измерений внести в табл. 3.

8. Сравнить экспериментально полученное значение момента инерции сплошного цилиндра, расположенного на расстоянии d от оси вращения, с теоретически рассчитанным значением.

Таблица 3

№	m, кг	t, с	$t_{\text{ср}}$, с	T, с	$J_{\text{с}2}$, кг·м^2	J_2, кг·м^2	ΔJ_2, кг·м^2	ε, %	$J_{2\,\text{теор}}$, кг·м^2
1 2 3									

Задание 4. Проверка зависимости момента инерции от распределения массы тела относительно оси

1. Расположить параллелепипед большой гранью на диске так, чтобы ось симметрии проходила через ось OO'.

2. Три раза определить время t 20 полных колебаний и по среднему времени по формуле (9) вычислить период колебаний.

3. По формуле (7) вычислить момент инерции $J_{\text{с}3}$ нагруженного диска, принимая массу m, равной массе диска и параллелепипеда ($m = m_0 + m_{\text{пар}}$).

4. Рассчитать момент инерции параллелепипеда по формуле

$$J_{\text{пар}} = J_{\text{с}3} - J_0.$$

5. Расположить параллелепипед меньшей гранью на диске так, чтобы параллелепипед был расположен симметрично относительно диаметра диска, а ось вращения проходила через его центр тяжести.

6. Три раза определить время t', за которое происходит 20 полных колебаний и по среднему времени вычислить период колебаний T'.

7. По формуле (7) вычислить момент инерции $J'_{с3}$ нагруженного диска, используя значение периода T'.

8. Рассчитать момент инерции параллелепипеда по формуле

$$J'_{пар} = J'_{с3} - J_0.$$

9. Результаты измерений и вычислений внести в табл. 4.

10. Сравнить значения $J_{пар}$ и $J'_{пар}$.

Таблица 4

№	m, кг	t, с	$t_{ср}$, с	T, с	t', с	$t'_{ср}$, с	$J_{с3}$, кг·м^2	$J_{пар}$, кг·м^2	$J'_{с3}$, кг·м^2	$J'_{пар}$, кг·м^2
1										
2										
3										

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси? Что называется моментом инерции тела относительно оси?

2. Каков физический смысл момента инерции?

3. В чем суть теоремы Штейнера?

4. Как теорема Штейнера проверяется экспериментально?

5. В какие моменты времени абсолютное значение угловой скорости диска будет максимальным?

6. Какой закон сохранения применяется при выводе формулы для определения момента инерции экспериментальным путем? Сформулируйте его.

7. Выведите формулу для расчета момента инерции сплошного цилиндра относительно оси симметрии.

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.

2. Теоретические основы использования трифилярного подвеса для определения моментов инерции твердых тел и проверки теоремы Штейнера.

3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.

4. Расчет погрешностей измерений моментов инерции диска и цилиндра.

5. Выводы по результатам работы (обобщение того, что сделано в работе, сравнение теоретически рассчитанного и экспериментально полученного значения момента инерции цилиндра относительно оси симметрии, заключение о выполнении или нарушении теоремы Штейнера, предложения по усовершенствованию лабораторной установки и по проведению работы).

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия момента инерции материальной точки относительно оси, момента инерции тела относительно оси, понимает физический смысл момента инерции и суть теоремы Штейнера;

– овладел знанием теоретических основ экспериментального определения моментов инерции твердых тел и проверки теоремы Штейнера с помощью трифилярного подвеса;

– решает типовые задачи на применение теоремы Штейнера;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментальная проверка возможности использования законов сохранения механической энергии и момента импульса для решения практической задачи механики по определению скорости полета пули.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Момент импульса. Законы сохранения момента импульса и энергии».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Момент импульса. Законы сохранения момента импульса и энергии

Метод определения скорости полета пули с помощью крутильного баллистического маятника основан на использовании законов сохранения момента импульса и механической энергии.

Моментом импульса материальной точки A относительно неподвижной точки O (рис. 1) называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O до точки A, на вектор импульса $\vec{p}$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}],$$

где m – масса материальной точки; υ – ее скорость.

Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.

Модуль момента импульса равен

$$L = r\,p\sin\alpha = pl,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, $r \cdot \sin\alpha = l$ – плечо импульса относительно точки *O* (т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки *O* на прямую, вдоль которой направлен $\vec{p}$).

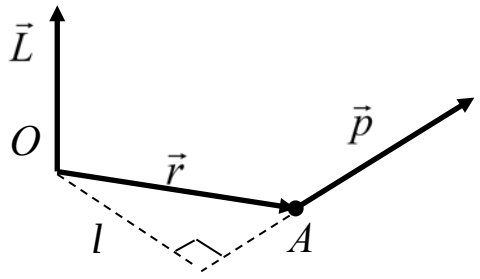

Рис. 1. Момент импульса $\vec{L}$ относительно неподвижной точки *O*

Моментом импульса относительно неподвижной оси *Z* называют скалярную величину L_z, равную проекции на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки *O* данной оси *Z* (рис. 2). Значение L_z не зависит от выбора точки положения *O* на оси *Z*.

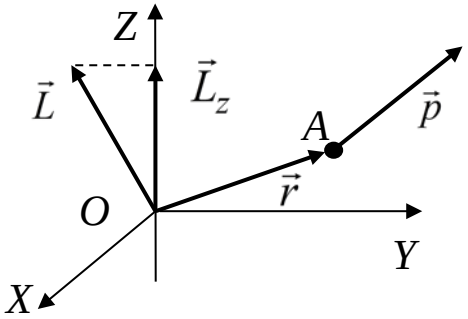

Рис. 2. Момент импульса $\vec{L}$ относительно неподвижной оси *Z*

При вращении абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси *Z* каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью υ_i. Скорость $\vec{\upsilon}_i$ и импульс $m_i\vec{\upsilon}_i$ перпендикулярны этому радиусу, поэтому радиус является плечом вектора $m_i\vec{\upsilon}_i$. Момент импульса отдельной частицы будет равен

$$L_i = m_i \upsilon_i r_i$$

и направлен по оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси Z равен сумме моментов импульса отдельных частиц

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i \cdot$$

Учитывая, что $\upsilon_i = \omega r_i$ получаем

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_Z \omega \cdot$$

Силой называют векторную физическую величину, являющуюся мерой воздействия на тело других тел и полей.

Силы, работа которых определяется только начальным и конечным положением тела и не зависит от формы траектории, называют **консервативными** или потенциальными. Силы, работа которых зависит от траектории перемещающегося тела из одной точки в другую, называют **диссипативными** (неконсервативными)

Совокупность материальных точек или тел, выделенных для рассмотрения, называют **механической системой.** Силы взаимодействия между телами системы называют внутренними. Силы, с которыми на тела системы действуют внешние тела, называют внешними. Если на механическую систему тел внешние силы не действуют, то такую систему называют **замкнутой или изолированной.**

Количественной мерой различных форм движения и взаимодействия материи является энергия. В соответствии с различными формами движения и взаимодействия материи энергию подразделяют на механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и другие виды.

Различают два вида механической энергии (кинетическую и потенциальную), сумму которых называют полной механической энергией или просто **механической энергией.**

Кинетическая энергия – это энергия, которой тела обладают вследствие своего движения. Физический смысл кинетической энергии заключается в следующем: кинетическая энергия тела равна работе, которую оно способно совершить в процессе уменьшения своей скорости до нуля. Изменение кинетической энергии тела при некотором перемещении равно работе результирующей силы, действующей на тело при этом перемещении.

Работа консервативной силы при бесконечно малом изменении конфигурации системы равна убыли некоторой функции, зависящей

только от относительного расположения тел системы и характера сил взаимодействия между ними. Эту функцию и называют **потенциальной энергией** системы.

Согласно **закону сохранения механической энергии**, полная механическая энергия системы тел в отсутствии диссипативных сил (как внутренних, так и внешних) остается постоянной.

Если между телами системы или на тела системы, кроме консервативных сил, действуют диссипативные силы, то полная механическая энергия не сохраняется. Работа диссипативных сил равна изменению полной механической энергии.

Утверждение о том, что момент импульса замкнутой системы остается постоянным, выражает **закон сохранения момента импульса.**

3.2. Крутильный баллистический маятник

Баллистическим маятником называют тяжелое тело, подвешенное на длинной проволоке (нити). Крутильный баллистический маятник – это маятник, совершающий повороты вокруг неподвижной оси то в одну, то в другую сторону.

Крутильный баллистический маятник совершает гармонические колебания при малых углах поворота φ, если действующий на него вращающий момент M пропорционален углу поворота

$$M = -D\,\varphi, \tag{1}$$

где D – коэффициент, называемый модулем кручения проволоки (коэффициентом момента упругих сил или коэффициентом упругости при крутильных колебаниях).

Величина D зависит от длины проволоки, ее диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon, \tag{2}$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения; ε – угловое ускорение, равное второй производной угла поворота φ по времени $(\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi})$.

Из (1) и (2) получаем

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0. \qquad (3)$$

Сравнивания (3) с дифференциальным уравнением свободных незатухающих гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

получаем

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

или

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} J, \qquad (4)$$

где T – период колебаний.

Представим маятник в виде стержня, подвешенного на проволоке длиной l (рис. 3).

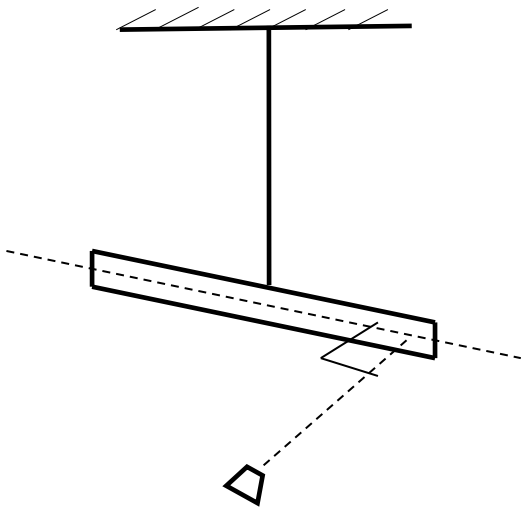

Рис. 3. Стержень и пуля

Пуля массы $m_{\text{п}}$, летящая горизонтально со скоростью υ, обладает импульсом $p = m_{\text{п}}\upsilon$. Попав в ловушку с пластилином, пуля начинает двигаться по окружности радиуса r. Момент импульса пули относительно оси вращения маятника перед столкновением с мишенью равен

$$L = p \cdot r = m_{\text{п}} \cdot \upsilon \cdot r.$$

Пуля, попав в мишень с пластилином, останавливается в ней и начинает двигаться с маятником как одно целое. Согласно закону сохранения момента импульса

$$m_{\text{п}} \upsilon r = J\,\omega, \tag{5}$$

где J – момент инерции маятника с пулей относительно оси вращения маятника; ω – угловая скорость маятника; $J\omega$ – момент импульса маятника с пулей; r – расстояние от линии, вдоль которой движется пуля, до оси вращения маятника.

Момент инерции маятника ($J_{\text{м}}$), используемого в данной работе, складывается из момента инерции стационарной части маятника J_0 (проволоки, стержней, ловушек с пластилином) и момента инерции двух перемещаемых грузов

$$J_{\text{м}} = J_0 + 2m_{\text{гр}}R^2,$$

где R – расстояние от грузов до оси вращения; $m_{\text{гр}}$ – масса каждого из грузов.

Момент инерции пули

$$J_{\text{п}} = m_{\text{п}}\, r^2.$$

Момент инерции маятника с пулей равен

$$J = J_{\text{м}} + J_{\text{п}} = J_0 + 2m_{\text{гр}}R^2 + m_{\text{п}}\, r^2. \tag{6}$$

Упругая сила, возникающая в проволоке при ее закручивании (повороте), будет противодействовать вращению маятника. Согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия маятника (энергия вращательного движения) после взаимодействия с пулей равна потенциальной энергии проволоки при ее закручивании

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{D\varphi^2}{2}, \tag{7}$$

где φ – угол поворота маятника.

Решая совместно уравнения (5) и (7) получим

$$\upsilon = \frac{\varphi}{m_{\text{п}} r}\sqrt{JD}. \tag{8}$$

С учетом (4) уравнение (8) запишем в виде

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi}{m_{\text{п}} rT} J. \tag{9}$$

Из уравнения (4) следует

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{D} = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{гр}} R^2 + m_{\text{п}} r^2}{D}. \qquad (10)$$

Для двух разных положений грузов можно записать

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{гр}} R_1^2 + m_{\text{п}} r^2}{D}$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{гр}} R_2^2 + m_{\text{п}} r^2}{D}. \qquad (11)$$

Из уравнений (11) следует, что

$$J_0 = \frac{2m_{\text{гр}}(T_1^2 R_2^2 - T_2^2 R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} - m_{\text{п}} r^2. \qquad (12)$$

После подстановки (12) в (6) уравнение (9) можно записать в виде

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi}{m_{\text{п}} r T_1} J_1 = \frac{2\pi\varphi}{m_{\text{п}} r T_1} \left(\frac{2m_{\text{гр}}(T_1^2 R_2^2 - T_2^2 R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} + 2m_{\text{гр}} R_1^2 \right)$$

или

$$\upsilon = \frac{4\pi m_{\text{гр}} \varphi T_1 (R_2^2 - R_1^2)}{m_{\text{п}} r (T_2^2 - T_1^2)}. \qquad (13)$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Общий вид установки для определения скорости полета пули приведен на рис. 4.

Установка представляет собой горизонтальное основание *1*, опирающееся на четыре ножки регулируемой высоты. На основании установлена вертикальная стойка *2* с тремя горизонтальными кронштейнами. На одном из кронштейнов установлена горизонтальная платформа *3* со стреляющим устройством *4*. Крутильный баллистический маятник состоит из стержня, укрепленного на проволоке *5* , на котором располагаются подвижные грузы цилиндрической формы и неподвижные относительно стержня ловушки с пластилином. Проволока укреплена на кронштейнах *6*, *7*. На платформу *3* устанавливается защитный кожух с прозрачной шкалой углов *8*. На основании *1* расположен секундомер *9*.

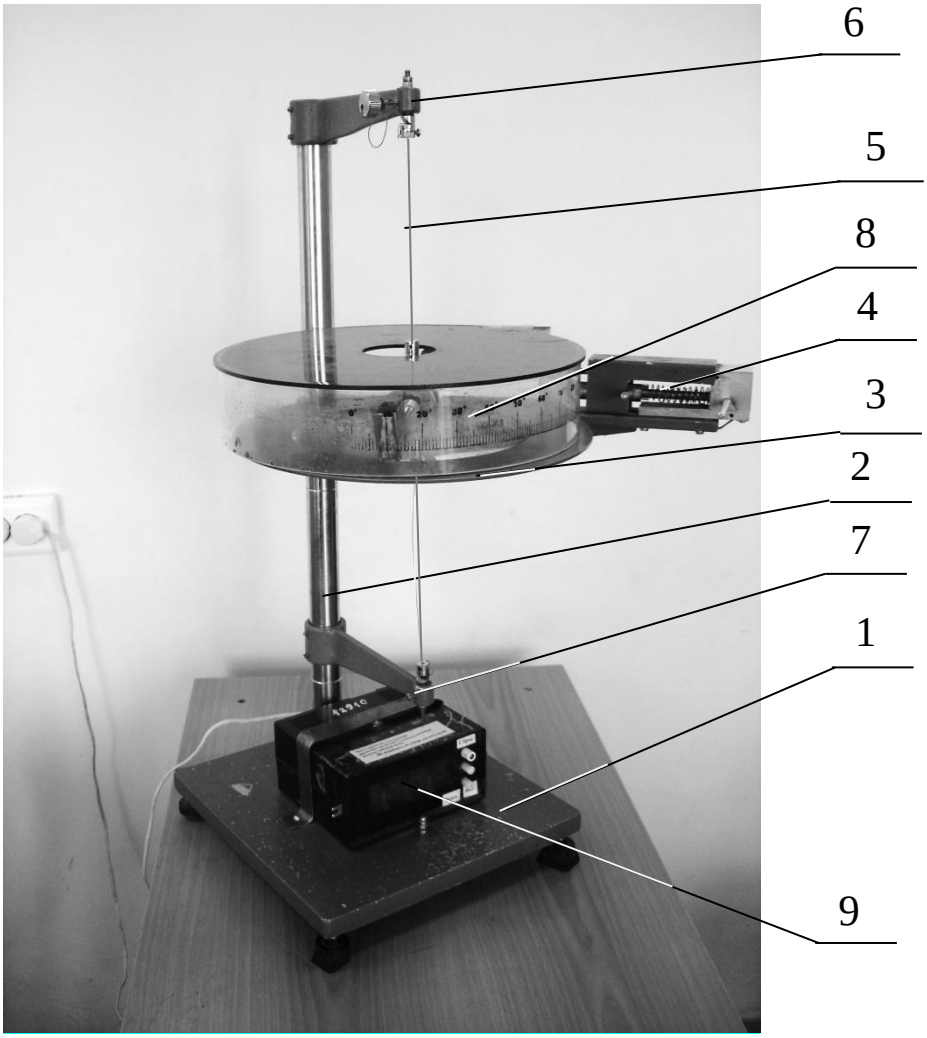

Рис. 4. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Не загромождать рабочее место посторонними предметами (одеждой, сумками и т.д.).

2. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и оборудованием.

3. На стреляющем устройстве пулю располагайте строго в направляющем стержне, чтобы она не попала в прозрачную шкалу или в аудиторию.

4. По окончании работы приведите в порядок свое рабочее место. Отключите секундомер.

6. ЗАДАНИЕ

Определение скорости полета пули по измерению периода колебаний и угла поворота крутильного баллистического маятника.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. С помощью ножек выровнять прибор, чтобы крутильный баллистический маятник мог совершать свободные колебания.

2. Максимально приблизить грузы друг к другу ($R_1 = R_{min}$).

3. Установить маятник таким образом, чтобы черта на ловушке совпадала с нулем на угловой шкале *8*, и чтобы укрепленный на проволоке стержень располагался перпендикулярно стреляющему устройству.

4. Зарядить пулю в стреляющее устройство и сделать выстрел.

5. Измерить угол поворота φ маятника и расстояние r от места попадания пули в ловушку с пластилином до оси вращения маятника.

6. Измерения по пунктам 3–5 провести 3 раза. Вычислить среднее значение $\varphi_{ср}$ и $r_{ср}$.

7. Отклонить маятник на угол $\varphi = \varphi_{ср}$ и измерить с помощью секундомера время 10 колебаний. Измерения повторить еще 2 раза. По среднему времени вычислить период T_1.

8. Максимально отдалить грузы друг от друга ($R_2 = R_{max}$). Отклонить маятник на угол $\varphi = \varphi_{ср}$ и измерить с помощью секундомера время 10 колебаний. Измерения повторить еще 2 раза. По среднему значению времени вычислить период T_2.

9. По формуле (13) вычислить скорость пули, приняв $m_{гр} = (200 \pm 1)$ г, $R_1 = 2$ см, $R_2 = 9$ см, масса пули $m_п$ – по указанию преподавателя. При расчетах угол $\varphi_{ср}$ выразить в радианах.

10. Все результаты измерений и вычислений занести в табл.1

11. Рассчитать погрешность определения скорости полета пули.

Таблица 1

№	$\varphi_{ср}$, град	$r_{ср}$, м	n_1	t_1, с	$t_{1\,ср}$, с	T_1, с	n_2	t_2, с	$t_{2\,ср}$, с	T_2, с
1										
2										
3										

Контрольные вопросы

1. Какой маятник называется крутильным баллистическим маятником?
2. От чего зависит момент инерции маятника?
3. Как изменится период колебаний крутильного баллистического маятника, если увеличить массу грузов, не передвигая их? Передвинуть грузы ближе к оси, не изменяя их массы?
4. Что называется моментом импульса материальной точки (твердого тела) относительно неподвижной оси?
5. Как определяется направление вектора момента импульса?
6. Как формулируется закон сохранения момента импульса?
7. Как записывается закон сохранения момента импульса для системы пуля – маятник? Раскройте физический смысл величин, входящих в уравнение.
8. Как формулируется закон сохранения механической энергии?
9. Какие силы называют консервативными? Какие силы называют диссипативными?
10. Как записывается закон сохранения механической энергии для системы маятник – упругая проволока? Раскройте физический смысл величин, входящих в уравнение.

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Теоретические основы использования колебаний крутильного баллистического маятника для определения скорости полета пули.
3. Таблицу с результатами измерений и вычислений.
4. Расчет погрешности измерения скорости полета пули.
5. Вывод по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия момента импульса, энергии, а также законы сохранения импульса и энергии;

– овладел знанием теоретических основ экспериментального определения скорости пули с помощью крутильного баллистического маятника;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 3
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

1. ЦЕЛИ РАБОТЫ

1. Экспериментальная проверка основного закона динамики вращательного движения.

2. Определение момента инерции маятника Обербека и момента сил трения.

3. Изучение зависимости момента инерции грузов, симметрично закрепленных на стержнях, от расстояния, на котором находятся центры масс грузов до оси вращения.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний по теме «Твердое тело в механике».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Основное уравнение динамики вращательного движения

Моментом силы относительно неподвижной точки O (рис. 1) называют векторное произведение радиус-вектора, проведенного из точки O до точки A приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

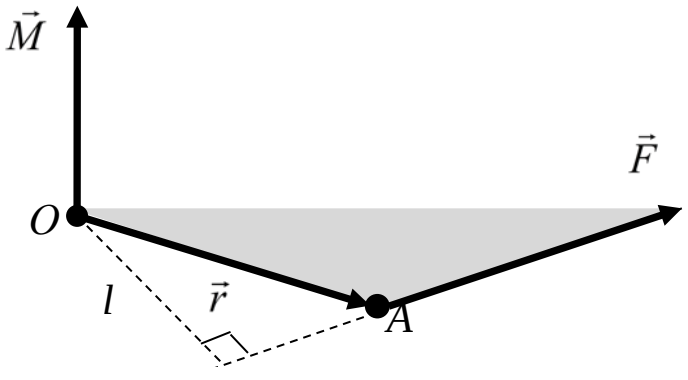

Рис. 1. Момент силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки O

Направление вектора $\vec{M}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$.

Модуль момента силы равен

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l,$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $r \cdot \sin\alpha = l$ – плечо силы относительно точки O (т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой действует сила).

Моментом силы относительно неподвижной оси Z или вращательным моментом называют скалярную величину M_z, равную проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$, определенного относительно произвольной точки O данной оси Z (рис. 2). Значение M_z не зависит от выбора точки положения O на оси Z.

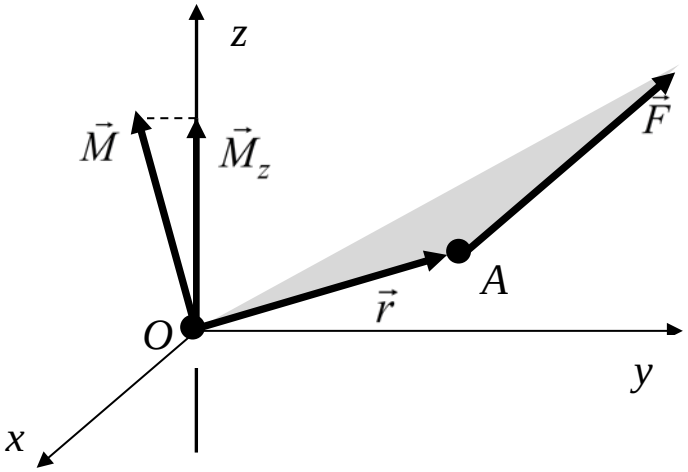

Рис. 2. Момент силы $\vec{M}$ относительно неподвижной оси Z

Если векторы $\vec{F}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны оси Z, то вектор момента силы относительно данной оси либо сонаправлен с осью Z, либо направлен противоположно оси Z и соответственно

$$M_z = \left|\vec{M}\right|$$

или

$$M_z = -\left|\vec{M}\right|.$$

Разобьем твердое тело, вращающееся вокруг оси Z, на материальные точки. На рис. 3 показана материальная точка массой m_i, расположенная на расстоянии r_i от оси вращения.

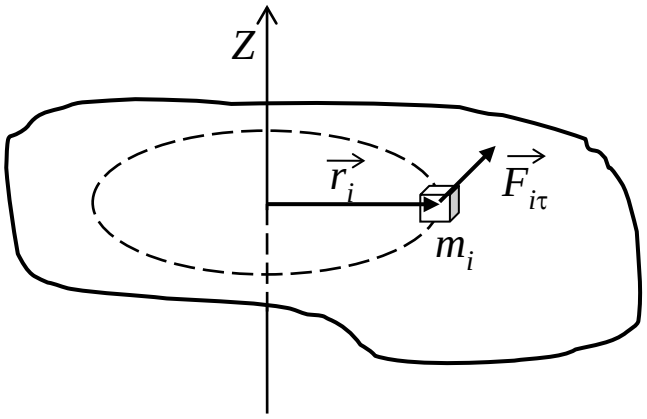

Рис. 3. Разбиение твердого тела на материальные точки

Пусть на нее действует сила $\vec{F}_{i\tau}$ вдоль касательной к траектории движения точки. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, сонаправленную с $\vec{F}_{i\tau}$,

$$F_{i\tau} = m_i \cdot a_{i\tau}, \qquad (1)$$

где $a_{i\tau}$ – проекция тангенциального ускорения точки на указанную ось, связанная с проекцией ее углового ускорения ε на ось Z соотношением

$$a_{i\tau} = \varepsilon \cdot r_i . \qquad (2)$$

Вращательный момент силы, действующий на материальную точку, равен

$$M_i = F_{i\tau} \cdot r_i . \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получаем

$$M_i = \varepsilon \cdot m_i \cdot r_i^2 . \qquad (4)$$

Аналогичные по виду уравнения можно записать для всех материальных точек тела, так как угловое ускорение у них одинаковое. Сложив их, получим

$$\sum_i M_i = \varepsilon \sum_i m_i \cdot r_i^2 . \qquad (5)$$

Сумма $\sum_i M_i$ в правой части этого уравнения представляет собой суммарный вращательный момент M всех сил, действующих на тело, а сумма $\sum_i m_i \cdot r_i^2$ в левой части равенства – момент инерции J тела относительно оси Z. С учетом этого и возможных различий

в направлениях как векторов $\vec{F}_{i\tau}$, так и $\vec{r}_i$ для различных точек тела, из уравнения (5) следует, что

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon} \ . \qquad (6)$$

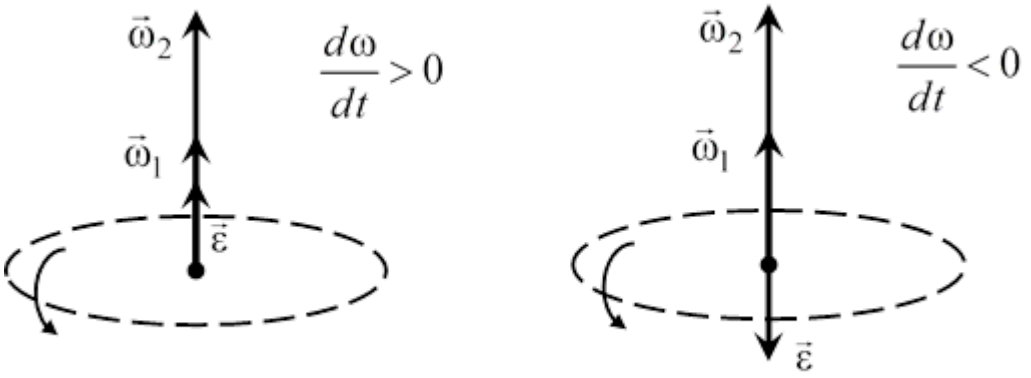

Рис. 4. Направление векторов углового ускорения

Полученное уравнение (6) называют основным уравнением динамики вращательного движения. Из (6) следует, что вектор момента силы $\vec{M}$ относительно оси сонаправлен с вектором углового ускорения $\vec{\varepsilon}$. При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения в сторону вектора приращения угловой скорости: при ускоренном движении $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с $\vec{\omega}$, при замедленном – противоположен ему (рис. 4). Сравнивая (6) с математическим выражением второго закона Ньютона для поступательного движения тела

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a},$$

можно заключить, что при вращательном движении роль силы $\vec{F}$ выполняет момент силы $\vec{M}$, роль массы m – момент инерции J. Следовательно, момент инерции является мерой инертности вращающегося тела.

3.2. Применение основного уравнения динамики вращательного движения к маятнику Обербека

Справедливость основного уравнения динамики вращательного движения можно проверить с помощью маятника Обербека, который схематично изображен на рис. 5.

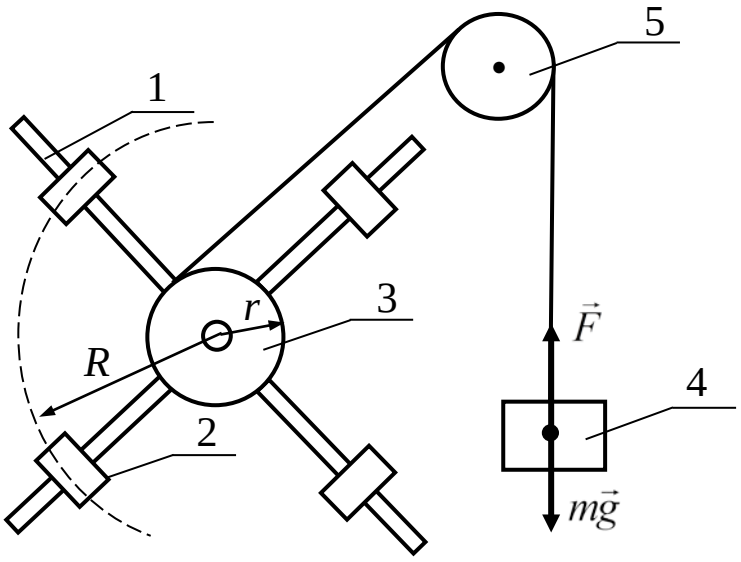

Рис. 5. Маятник Обербека

Маятник состоит из четырех стержней *1* с нанесенными на них делениями, насаженных на втулку под прямым углом друг к другу. На стержни надеваются одинаковые грузы *2*, которые могут быть закреплены на разных расстояниях R от оси вращения. На втулку также насажен диск *3* радиусом r. Гиря *4*, приводящая маятник во вращение, прикреплена к концу нити, которая перекинута через блок *5* и наматывается на диск *3*.

Движение гири *4* происходит под действием силы тяжести $m\vec{g}$ (где m – масса гири) и силы натяжения нити $\vec{F}$. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения гири имеет вид

$$ma = mg - F\,. \qquad (7)$$

Ускорение гири a можно найти, зная время t ее опускания и пройденный путь h,

$$a = \frac{2h}{t^2}. \qquad (8)$$

Маятник Обербека вращается под действием момента силы натяжения нити и момента силы трения. Учитывая (7) и (8), момент силы натяжения относительно оси вращения маятника равен

$$M = F \cdot r = m\, r \left(g - \frac{2\, h}{t^2} \right). \qquad (9)$$

Тангенциальное ускорение точек на ободе диска *3*, удаленных на расстояние *r* от оси его вращения, равно ускорению гири

$$a_\tau = a\,.$$

Учитывая соотношение, связывающее угловое ускорение и тангенциальное ускорение точек окружности диска,

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r\,,$$

из формулы (8) находим

$$\varepsilon = \frac{2\, h}{t^2\ r}. \qquad (10)$$

Согласно равенству (6), уравнение движения маятника имеет вид

$$\vec{M} + \vec{M}_{\text{тр}} = J \cdot \vec{\varepsilon},$$

где $\vec{M}$ – момент силы натяжения нити; $\vec{M}_{\text{тр}}$ – момент силы трения; J – момент инерции маятника.

В проекции на ось вращения

$$M - M_{\text{тр}} = J \cdot \varepsilon, \qquad (11)$$

Откуда

$$M = M_{\text{тр}} + J \cdot \varepsilon\,. \qquad (12)$$

Момент инерции J маятника Обербека может быть представлен как сумма моментов инерции J_0 диска со стержнями и момента инерции четырех грузов $J_{\text{гр}}$, закрепленных на стержнях *4* на равных расстояниях от оси вращения.

Если размеры грузов малы по сравнению с расстоянием R от центра масс каждого из грузов до оси вращения, то их можно считать материальными точками. В этом случае момент инерции грузов равен

$$J_{\text{гр}} = 4 m_{\text{гр}} R^2, \qquad (13)$$

где $m_{\text{гр}}$ – масса одного груза, закрепленного на стержне.

Тогда момент инерции маятника

$$J = J_0 + J_{\text{гр}} = J_0 + 4\, m_{\text{гр}} R^2. \qquad (14)$$

Из равенства (12) видно, что если сила трения постоянна, то зависимость величины M от ε линейная, графиком которой является прямая. При этом момент инерции J играет роль углового коэффициента k. Таким образом, экспериментальное исследование взаимосвязи между M и ε позволяет найти момент инерции маятника J и момент силы трения $M_{\text{тр}}$. Графиком зависимости момента инерции J маятника Обербека от расстояния R между центром масс каждого из грузов до оси вращения, согласно (14), будет парабола.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Общий вид установки с маятником Обербека приведен на рис. 6.

На вертикальной стойке *1* со шкалой, установленной на основании *2*, прикреплены кронштейн *3* , две втулки *4* и *5*, флажок *6*. Основание снабжено регулируемыми ножками *7*, обеспечивающими горизонтальную установку прибора.

На верхней втулке *5* закреплен диск *8*, через который переброшена нить *9*. Один конец нити прикреплен к диску *10*, а на другом конце закреплены грузы *11*. На кронштейне *3* закреплен фотоэлектрический датчик *12* и находится разъем *13* для подключения электронного блока ВМ – 1/1, с помощью которого измеряется время движения груза.

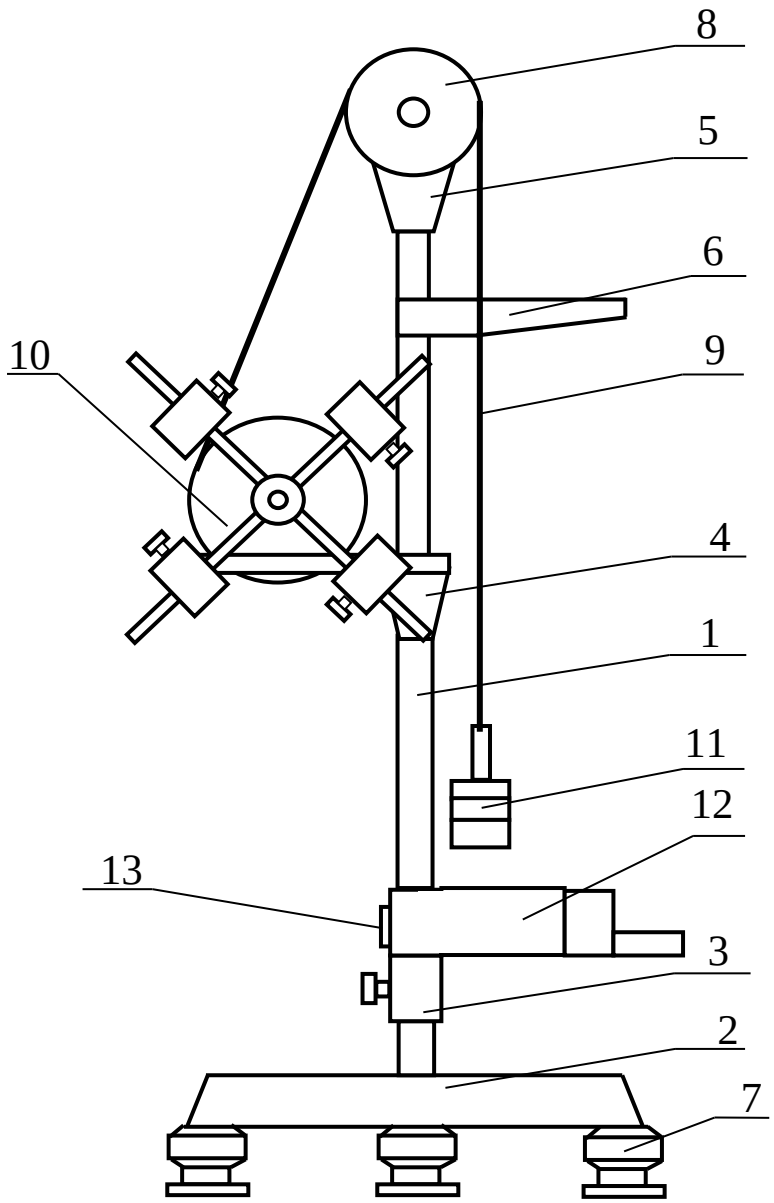

Рис. 6. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданиями и лабораторной установкой. О замеченных неисправностях сообщите преподавателю или лаборанту.

2. Не загромождайте рабочее место предметами, не имеющими отношения к выполняемой работе.

3. Тщательно закрепляйте грузы на крестовине, чтобы они не слетали при раскручивании маятника.

4. Следите за равномерной намоткой нити на шкив.

5. По окончании работы обесточьте прибор и приведите в порядок рабочее место.

6. ЗАДАНИЯ

1. Проверка зависимости величины углового ускорения ε от величины момента силы натяжения M при постоянном моменте инерции I_0.

2. Исследование зависимости момента инерции грузов, закрепленных на стержнях, от расстояния между центром масс каждого груза и осью вращения.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Проверка зависимости величины углового ускорения ε от величины момента силы натяжения M при постоянном моменте инерции J_0.

1. Снять грузы со стержней крестовины маятника Обербека.

2. Установить кронштейн с фотодатчиком в нижней части вертикальной стойки таким образом, чтобы гиря с грузами при движении вниз проходила по центру рабочего окна фотодатчика.

3. К концу нити подвесить груз массы m_1. Установить нижний край груза на определенной высоте, используя красный флажок на вертикальной стойке.

4. Включить электросекундомер. Одновременно нажать на кнопку «ПУСК» и отпустить груз. Происходит растормаживание электромагнита, гиря начинает опускаться, и таймер блока начинает отсчет времени. При пересечении гирей фотоэлектрического датчика отсчет времени прекратится. Записать показания таймера, т.е. время движения гири t.

5. Определить пройденный грузом путь h – расстояние от нижней плоскости гири в ее верхнем положении до оптической оси фотодатчика.

6. Записав значения h, m, t, нажать клавишу «СБРОС». Для повышения точности измерений опыт повторить еще два раза, не изменяя h.

7. Определить среднее значение времени движения груза.

8. По формуле (10) по среднему времени рассчитать угловое ускорение маятника.

9. По формуле (9) по среднему времени рассчитать момент силы натяжения.

10. Повторить п. 4–9 для грузов с массами m_2, m_3, m_4, m_5.

11. Все данные занести в табл. 1.

Таблица 1

m, кг		t, с	$t_{ср}$, с	r, м	h, м	ε, $с^{-2}$	M, $кг·м^2·с^{-2}$
m_1	1 2 3						
m_2	1 2 3						
m_3	1 2 3						
m_4	1 2 3						
m_5	1 2 3						

12. Построить график зависимости $\varepsilon = f(M)$.

13. Из графика найти момент инерции маятника без грузов J_0 и момент силы трения $M_{тр}$.

Задание 2. Изучение зависимости момента инерции грузов, симметрично закрепленных на стержнях, от расстояния на которых находятся центры масс грузов до оси вращения.

1. Надеть на стержни грузы и укрепить их на одинаковых расстояниях от оси вращения.

2. Измерить расстояние R от оси вращения до центра масс одного из грузов на крестовине.

3. К концу нити подвесить груз массы m_1.

4. Три раза измерить время падения груза и по среднему времени по формулам (10) и (9) рассчитать угловое ускорение ε и момент силы натяжения нити M.

5. Вычислить момент инерции маятника с грузами на крестовине

$$J = \frac{M - M_{тр}}{\varepsilon}.$$

6. Определить момент инерции грузов относительно оси вращения по формуле

$$J_{\text{гр}} = J - J_0,$$

где J_0 – момент инерции маятника без грузов.

7. Не меняя груз массой m_1, подвешенный на нити, повторить п. 2–6 для шести различных положений грузов на крестовине, изменяя расстояние R от оси вращения до центра масс каждого груза с шагом 2 см.

8. Занести все данные в табл. 2.

Таблица 2

N	h, м	r, м	R, м	t, с	$t_{\text{ср}}$, с	ε, с^{-2}	M, $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$	J, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$J_{\text{гр}}$, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$J_{\text{теор.}}$, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$
1										
2										
3										
4										
5										
6										

9. Рассчитать и записать в табл. 2 теоретически ожидаемые значения моментов инерции грузов, находящихся на расстояниях R от оси вращения по формуле

$$I_{\text{теор}} = 4m_{\text{гр}}R^2,$$

где $m_{\text{гр}}$ – масса одного из закрепленных грузов.

10. На одном рисунке построить графики экспериментально полученной и теоретически ожидаемой зависимости момента инерции грузов, закрепленных на стержнях, от квадрата расстояния между центром масс каждого из грузов и осью вращения $J_{\text{гр}} = f(R^2)$. Проанализировать возможные причины несовпадения графиков.

Контрольные вопросы

1. Что называют моментом инерции материальной точки относительно оси? Что называют моментом инерции твердого тела относительно оси?
2. Каков физический смысл момента инерции тела?
3. Что называют моментом силы относительно точки *O*? Что называют моментом силы относительно оси?
4. Как определяют направление векторов углового ускорения, момента силы?
5. Как формулируется основной закон динамики вращательного движения?
6. Каким образом в данной работе можно изменять вращающий момент, действующий на маятник Обербека?
7. Моменты каких сил и как рассчитываются в работе?
8. Как экспериментально оценить момент сил трения?
9. Как получить зависимость момента инерции грузов от расстояния до оси вращения?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Теоретические основы использования маятника Обербека для проверки основного закона динамики вращательного движения.
3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.
4. Графики зависимостей $\varepsilon = f(M)$ и $J_{\text{гр}} = f(R^2)$.
5. Найденные из графика $\varepsilon = f(M)$ значения момента инерции маятника без грузов J_0 и момента силы трения $M_{\text{тр}}$.
6. Вывод по результатам работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия момента инерции материальной точки и тела относительно оси, момента силы относительно точки и относительно оси, а также основной закон динамики вращательного движения, умеет определять направление векторов углового ускорения и момента силы;

– овладел знанием теоретических основ экспериментальной проверки основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– сформулировал выводы о проделанной работе;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2016.

Лабораторная работа № 4
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение момента инерции тела относительно различных осей методом крутильных колебаний.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление студентами понятия момента инерции тела относительно оси, исследование его зависимости от массы тела и ее распределения относительно оси.
2. Сравнение экспериментально полученных и теоретически рассчитанных значений момента инерции тела относительно оси.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Момент инерции. Теорема Штейнера

Моментом инерции материальной точки относительно оси называют величину

$$J_i = m_i \cdot r_i^2, \qquad (1)$$

где m_i – масса материальной точки, r_i – расстояние от материальной точки до оси.

Моментом инерции тела относительно оси называют сумму моментов инерции материальных точек, составляющих тело

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^{\,2}. \qquad (2)$$

Момент инерции твердого тела относительно интересующей оси, как следует из (2), является величиной аддитивной, т.е. момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции этих тел.

Представляя тело состоящим из сколь угодно малых частей объемом dV и массой dm и полагая массу непрерывно распределенной, его момент инерции относительно данной оси можно найти интегрированием

$$J = \int_m r^2 \, dm = \int_V \rho r^2 \, dV, \qquad (3)$$

где ρ – плотность вещества тела.

Рассчитаем момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси OY, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (рис. 1). Разобьем стержень на элементы массой dm и длиной dx. Момент инерции произвольно выбранного элемента с координатой x относительно оси $0Y$ равен

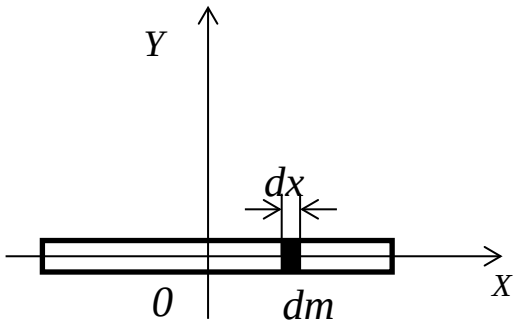

Рис. 1. Разбивка стержня на элементы

$$dJ = x^2 dm = x^2 \frac{m}{l} dx, \qquad (4)$$

а момент инерции всего стержня относительно этой оси будет равен

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} m l^2. \qquad (5)$$

Момент инерции тонкой однородной пластины прямоугольной формы массой m, длиной b и шириной c относительно оси OZ, проходящей через ее центр масс (рис. 2), можно рассчитать, представив ее в виде совокупности тонких стержней массой dm и длиной b. Момент инерции dJ любого такого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину согласно (5) равен $dJ = \frac{1}{12} b^2 dm$, а момент инерции всей пластины относительно взятой оси OZ

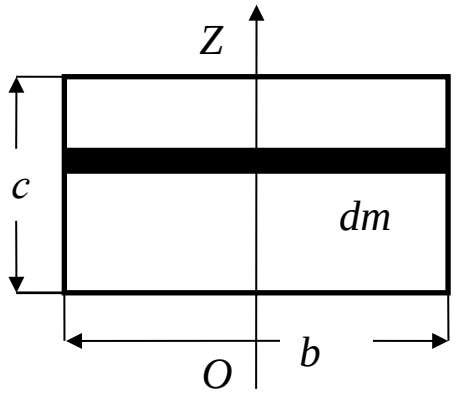

Рис. 2. Разбивка пластины на тонкие стержни

$$J = \int dJ = \int_0^m \frac{1}{12} b^2 dm = \frac{1}{12} m b^2. \qquad (6)$$

Вычислим теперь момент инерции однородного сплошного параллеле-пипеда относительно оси симметрии OZ (рис. 3). Разобьем его на параллельные пластины равной массы dm, толщиной dy со сторонами b и c.

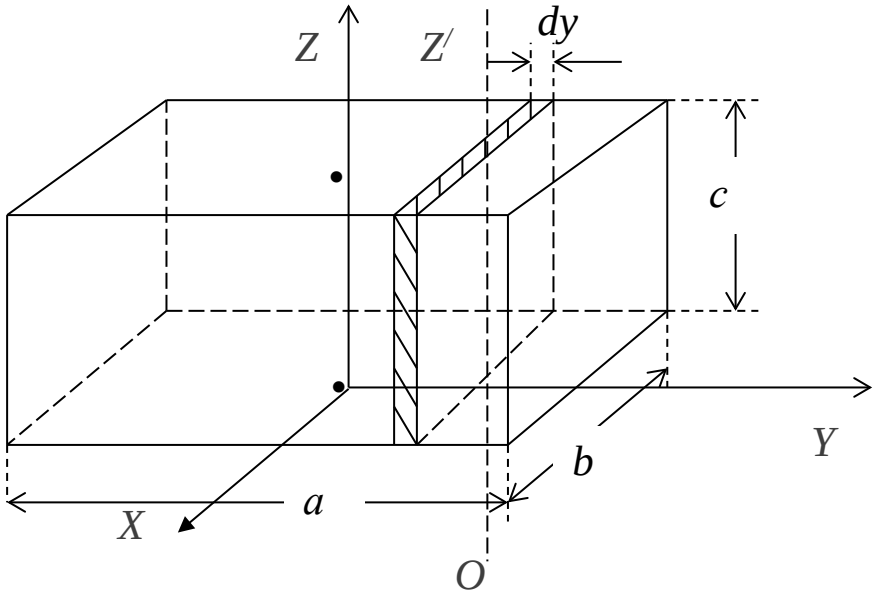

Рис. 3. Разбивка параллелепипеда на пластины

Момент инерции dJ_1 пластины, положение которой задается координатой y относительно вертикальной оси $O^{/}Z^{/}$, равен

$$dJ_1 = \frac{1}{12} b^2 dm. \qquad (7)$$

Ее момент инерции dJ относительно оси OZ найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера, согласно которой момент инерции J тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_c тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями

$$J = J_c + md^2. \qquad (8)$$

По этой теореме

$$dJ = \frac{1}{12} dm \cdot b^2 + dm \cdot y^2 = dm\left(\frac{b^2}{12} + y^2\right) = \frac{m}{a} \cdot dy\left(\frac{b^2}{12} + y^2\right). \qquad (9)$$

Момент инерции параллелепипеда относительно оси OZ равен

$$J = \int dJ = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{m}{a}\left(\frac{b^2}{12} + y^2\right) dy = 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a}\left(\frac{b^2}{12} + y^2\right) dy = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right) \qquad (10)$$

где a и b – длины сторон параллелепипеда, расположенные в плоскости XOY, m – масса параллелепипеда.

3.2. Метод крутильных колебаний

В настоящей работе моменты инерции тела определяются с помощью крутильных колебаний. При повороте рамки, закрепленной на натянутой проволоке, происходит закручивание проволоки (рис. 4).

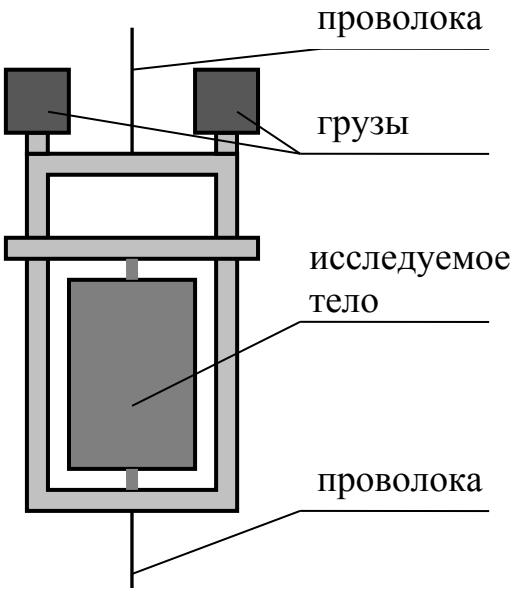

Рис. 4. Рамка с грузами

Возникающие при этом силы упругости стремятся вернуть рамку в исходное положение. Величина M момента возвращающей силы при малом угле φ поворота рамки будет пропорциональна ему

$$M = D \cdot \varphi, \tag{11}$$

где D – коэффициент, называемый модулем кручения проволоки. Величина D зависит от длины проволоки, ее диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки.

По основному закону динамики вращательного движения

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}, \tag{12}$$

где ε – угловое ускорение тела; J – его момент инерции относительно оси вращения.

Из (11) и (12) получается дифференциальное уравнение незатухающих гармонических колебаний

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^{\,2} \cdot \varphi = 0, \tag{13}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{J}}$ – собственная частота колебаний.

Решением уравнения (13) является функция $\varphi(t)$

$$\varphi=\varphi_0 \cos\left(\omega_0 t+\alpha\right), \tag{14}$$

где φ_0 – амплитуда колебаний и α – начальная фаза.

Таким образом, угол φ отклонения рамки изменяется по гармоническому закону с периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}. \tag{15}$$

Период колебания T_p пустой рамки с моментом инерции J_p относительно оси ее вращения равен

$$T_p=2\pi\sqrt{\frac{J_p}{D}}. \tag{16}$$

а период T_1 колебаний системы, состоящий из рамки с установленными на нее грузами с суммарным моментом инерции J_0 относительно оси вращения

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{J_p+J_0}{D}}. \tag{17}$$

Исключая из (16) и (17) модуль кручения проволоки D, получаем формулу для расчета момента инерции J_p рамки

$$J_p=J_0\cdot\frac{T_p^2}{T_1^2-T_p^2}. \tag{18}$$

Если вместо грузов в рамке установить другое тело, то при известном значении J_0 период T_2 колебаний этой системы будет равен

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{J_p+J}{D}}, \tag{19}$$

где J – момент инерции тела.

Решая систему уравнений (17) и (19) исключением D, получаем формулу для расчета момента инерции J установленного тела относительно оси его вращения

$$J=J_p\left(\frac{T_2^2}{T_p^2}-1\right). \tag{20}$$

С учетом (18)

$$J=J_0\cdot\frac{T_2^2-T_p^2}{T_1^2-T_p^2}. \tag{21}$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Общий вид установки для определения моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний приведен на рис. 5.

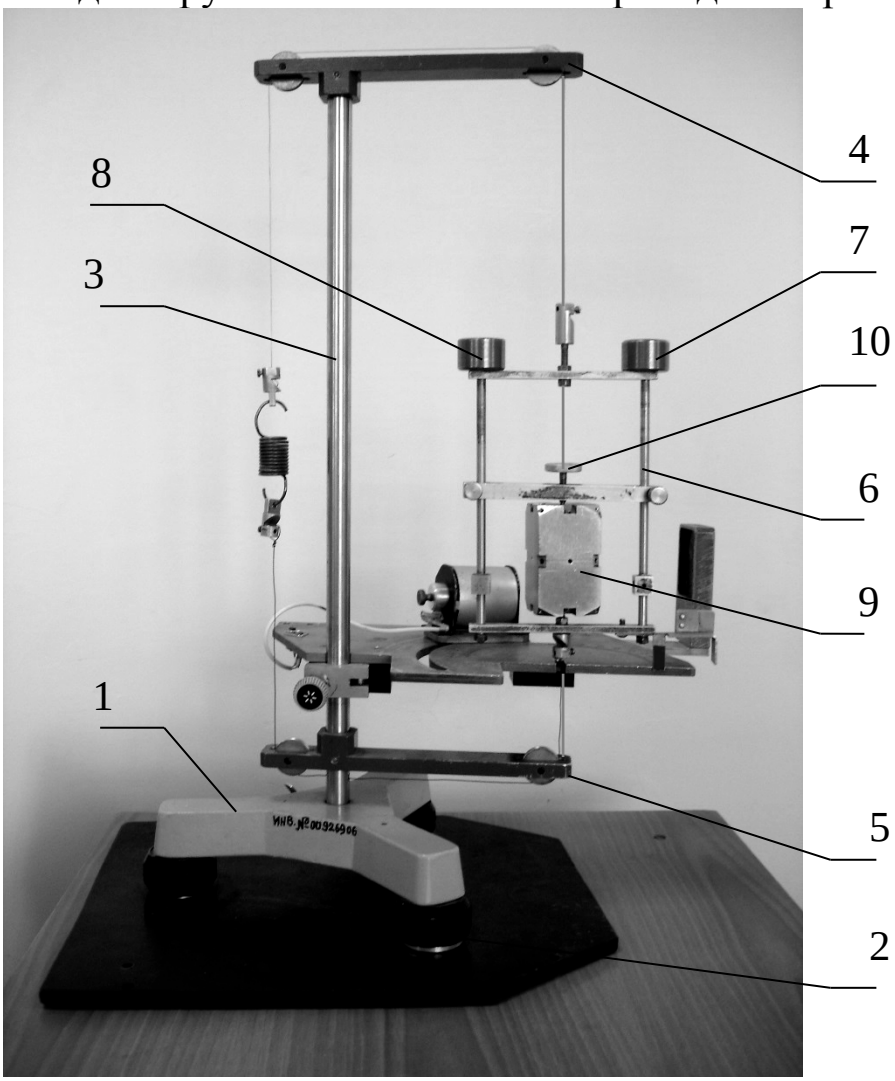

Рис. 5. Экспериментальная установка

Основание *1* установки оснащено регулируемыми ножками *2*, которые позволяют производить выравнивание прибора. На основании закреплен штатив *3*, к которому крепятся неподвижные кронштейны *4* и *5*. Между верхним и нижним кронштейном на двух натянутых проволоках закреплена рамка *6*. Два сплошных цилиндра *7* и *8* с известным значением момента инерции устанавливают на верхние штыри, выступающие из рамки. Исследуемое тело *9* (параллелепипед или куб) жестко закрепляют в рамке крутильного маятника между ее основанием и параллельной скользящей перекладиной с помощью ввернутого в нее винта *10*.

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданиями и лабораторной установкой.

2. Обязательно проверьте надежность закрепления тела.

3. По окончании работы уберите из рамки тело, приведите в порядок свое рабочее место.

6. ЗАДАНИЯ

1. Измерение момента инерции рамки относительно оси симметрии.

2. Измерение момента инерции тела в зависимости от распределения его массы в пространстве относительно выбранной оси.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Измерение момента инерции рамки относительно оси вращения

1. Повернув рамку на 5–10 градусов, измерить длительность времени t, за которое рамка совершает $N = 20$ полных колебаний. Опыт повторить еще два раза. Рассчитать среднее время $t_{ср}$ двадцати колебаний рамки и период колебаний T_p рамки

$$T_p = \frac{t_{ср}}{N}. \qquad (22)$$

2. Установить два цилиндра на рамку. Три раза определить время t_1 двадцати полных колебаний рамки с цилиндрами. По среднему времени определить период колебаний T_1 рамки с цилиндрами

$$T_1 = \frac{t_{ср1}}{N}. \qquad (23)$$

3. Определить момент инерции рамки J_p по формуле (18), где

$$J_0 = 2\,m\,(\frac{r^2}{2} + l^2)$$

($m = 0{,}106$ кг – масса одного цилиндра; $r = 0{,}015$ м – радиус цилиндра; $l = 0{,}052$ м – расстояние от оси вращения рамки до оси цилиндра).

4. Рассчитать относительную ε и абсолютную ΔJ_p погрешности измерения момента инерции рамки J_p относительно оси.

5. Результаты измерений и расчетов занести в табл. 1.

Таблица 1

№ опыта	t, с	$t_{ср}$, с	T, с	t_1, с	$t_{1\,ср}$, с	T_1, с	J_0, кг·м^2	$J_р$, кг·м^2	$\Delta J_р$, кг·м^2	ε %
1										
2										
3										

Задание 2. Измерение момента инерции тела в зависимости от распределения его массы в пространстве относительно оси симметрии

1. Снять грузы, установить параллелепипед или куб (по указанию преподавателя) в рамке и закрепить специальными винтами так, чтобы острия винтов входили в углубления на образце вдоль оси (рис. 6).

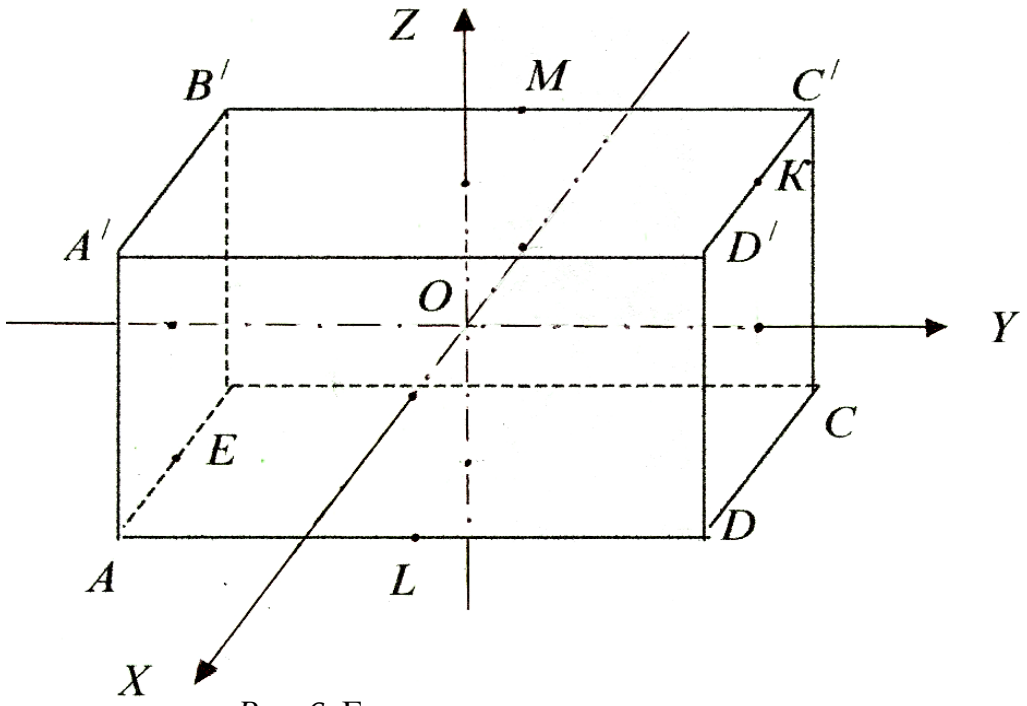

Рис. 6. Главные оси параллелепипеда

2. Три раза определить время t_2 двадцати полных колебаний рамки с образцом и по среднему времени $t_{ср2}$ рассчитать период колебаний T_2 системы

$$T_2 = \frac{t_{ср2}}{N}. \qquad (24)$$

3. Определить момент инерции исследуемого тела по формуле (21).

4. Выполнить п. п. 2 и 3 еще для двух из указанных на рис. 6 осей (по указанию преподавателя) и сравнить моменты инерции образца относительно различных осей.

5. Рассчитать относительную и абсолютную погрешности измерения момента инерции образца J относительно одной оси.

6. Вычислите теоретическое значение момента инерции образца J по формуле (10) относительно тех осей, которые брались при измерениях и сравните их с экспериментально определенными значениями моментов инерции.

7. Результаты всех измерений и расчетов занести в табл. 2.

Таблица 2

Ось	№ опыта	t_2, с	$t_{2\,ср}$	T_2, с	J, кг·м^2	ΔJ, кг·м^2	ε, %
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						

Контрольные вопросы

1. Что называют моментом инерции материальной точки относительно оси?

2. Что называют моментом инерции тела относительно оси?

3. Каков физический смысл момента инерции?

4. В чем суть теоремы Штейнера?

5. Что утверждает основной закон динамики вращательного движения?

6. Какие колебания совершает рамка при малых углах поворота? Как записывается дифференциальное уравнение таких колебаний? Как изменяется со временем угол поворота?

7. Как рассчитать момент инерции однородного параллелепипеда относительно различных осей симметрии?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.

2. Теоретическую основу метода определения момента инерции тел, используемого в работе.

3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.

4. Расчет относительной и абсолютной погрешности определения момента инерции рамки J_p относительно оси, момента инерции тела J относительно одной из осей.

5. Выводы по результатам проделанной работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– овладел понятиями момента инерции материальной точки и тела относительно оси, усвоил физический смысл момента инерции, теорему Штейнера, основной закона динамики вращательного движения;

– знает теоретические основы метода крутильных колебаний;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.

2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.

3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 5
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение моментов инерции математического и физического маятников, а также изучение зависимости момента инерции физического маятника от распределения массы.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление знаний физических характеристик вращательного движения твердого тела.
2. Освоение метода колебаний для измерения моментов инерции тел различной формы.
3. Приобретение навыков проведения измерений и умения обработки полученных при этом данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Моментом инерции тела относительно выбранной оси называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек тела на квадрат их расстояния до оси

$$J = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i J_i . \qquad (1)$$

Величина $J_i = m_i r_i^2$ называется **моментом инерции материальной точки относительно оси вращения.**

Момент инерции – величина аддитивная, т.е. момент инерции тела равен сумме моментов инерций составных частей тела.

Измерив периоды колебаний математического и физического маятников, можно определить моменты инерции тел произвольной формы.

Математическим маятником называется материальная точка массой m_0, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной l и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Момент инерции математического маятника

$$J = m_0 l^2 . \qquad (2)$$

Период колебаний математического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (3)$$

Физическим маятником (рис. 1) называется твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр инерции, под действием силы тяжести.

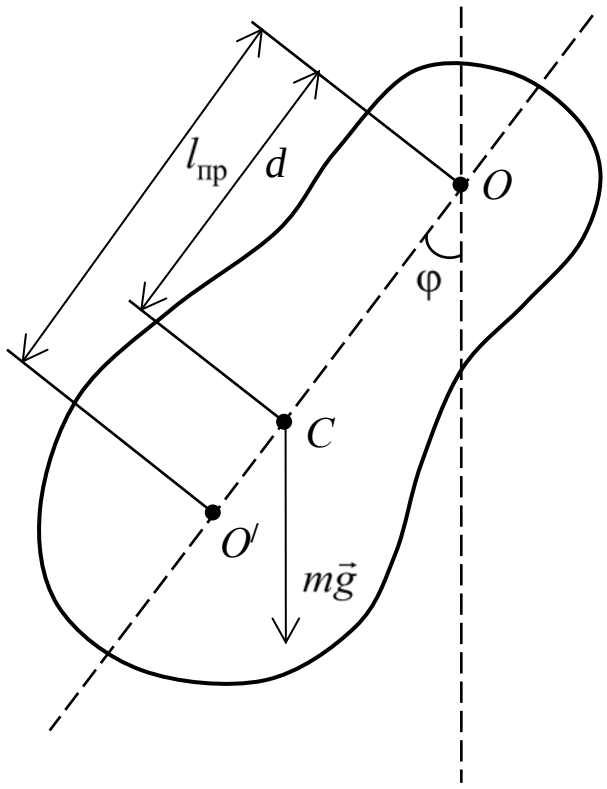

Рис. 1. Физический маятник

Если силами сопротивления среды и трения в подвесе маятника можно пренебречь, то при отклонении маятника на угол φ от положения равновесия момент силы M, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия, создается только силой тяжести $m\vec{g}$.

$$M = -m\,g\,d\sin\varphi, \qquad (4)$$

где $d = OC$ – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника; m – масса маятника; $d\sin\varphi$ – плечо силы тяжести (рис. 1).

Основное уравнение динамики вращательного движения с учетом (4) можно записать в виде

$$M = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m\,g\,d\sin\varphi.$$

При малых углах отклонения $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m\,g\,d\,\varphi. \qquad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m\,g\,d}{J}\varphi = 0 \qquad (6)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0{}^2\,\varphi = 0. \qquad (7)$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (8)$$

где φ_0 – амплитуда и α – начальная фаза. Колебания происходят с собственной частотой ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}. \qquad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника J относительно оси вращения, проходящей через точку O, и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника. Зная ω_0, можно рассчитать **период колебания *T* физического маятника**:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}. \qquad (10)$$

Из сопоставления формул (3) и (10) следует, что математический маятник длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{m\,d} \qquad (11)$$

будет иметь такой же период колебаний, что и данный физический маятник. Величину $l_{\text{пр}}$ называют **приведенной длиной физического маятника**.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения *O*, называется **центром качания физического маятника** *O′* (рис. 1).

По теореме Штейнера момент инерции тела относительно произвольной оси *O*, не проходящей через центр масс, равен

$$J = J_c + md^2, \tag{12}$$

где J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной данной оси; d – расстояние между осями.

Подставим в уравнение (11) момент инерции, определяемый выражением (12),

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_c + md^2}{md} = \frac{J_c}{md} + d\,. \tag{13}$$

Из уравнения (13) видно, что приведенная длина всегда больше *d*, так что точка подвеса *O* и центр качания *O′* лежат по разные стороны от центра инерции *C*.

Зная период колебания *T*, массу физического маятника *m* и приведенную длину, можно рассчитать момент инерции *J* физического маятника

$$J = l_{\text{пр}} \cdot md$$

или

$$J = \frac{g\,md\,T^2}{4\pi^2} = J_c + md^2\,. \tag{14}$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Комплексная установка для определения моментов инерции математического и физического маятников (рис. 2) состоит из вертикальной стойки *1*, основания *2* и элементов подвеса физического (*3* или *3′*) и математического маятников. На конце призмы *4* закреплен зажим *5* для подвеса и изменения длины математического маятника.

Математический маятник представляет собой стальной шарик *6*, подвешенный на нити *7*. Длина нити математического маятника может меняться.

Физический маятник сделан из стали в виде длинного стержня *3* (или стальной пластины *3′*), на котором в разных местах может крепиться груз *8* (или *8′*). Для подвеса физического маятника в верхней части стойки горизонтально закреплена стальная каленая призма *4*. Положение центра инерции физического маятника определяют с помощью специально предназначенной призмы *9*. Для измерения времени колебаний используют секундомер *10*.

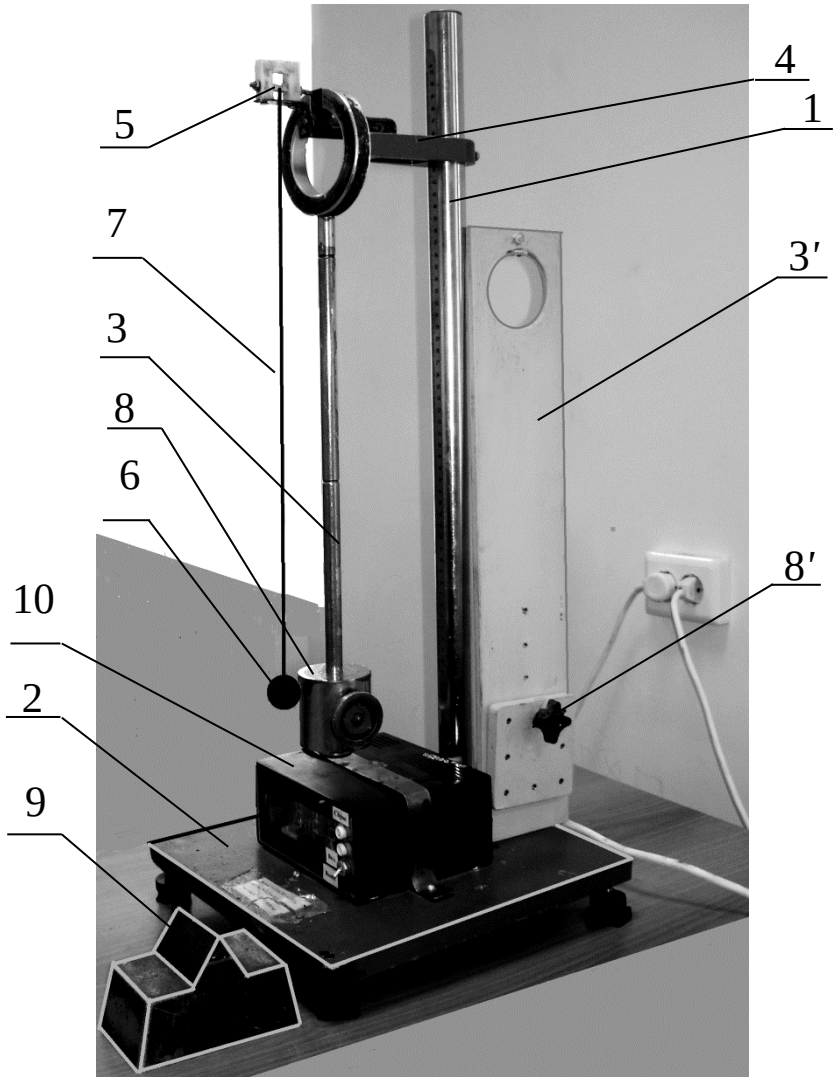

Рис. 2. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Не загромождайте рабочее место посторонними предметами (одежда, сумка и т.д.).

2. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и оборудованием.

3. Следите за тем, чтобы груз, перемещаемый на физическом маятнике, был закреплен.

4. Следите за устойчивостью положения физического маятника на призме *4* при определении центра масс маятника.

5. При пользовании электрическим секундомером не оставляйте его включенным без надобности.

6. ЗАДАНИЯ

1. Определение моментов инерции твердых тел произвольной формы с помощью математического и физического маятников.

2. Исследование зависимости момента инерции тела от распределения его массы относительно оси вращения и проверка теоремы Штейнера.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Определение моментов инерции математического и физического маятников

1. Подвесить физический маятник (*3* или *3′* по заданию преподавателя) на призму, закрепив груз *8* (или *8′*) в нижнем положении. Отклонить маятник от вертикали на малый угол (5º–7º) и отпустить. Измерить время t 30-ти полных колебаний и определить период колебаний $T = \frac{t}{n}$ (n – число колебаний). Измерения произвести не менее трех раз.

2. Подобрать длину математического маятника так, чтобы значения его периода колебаний совпали с периодом колебаний физического маятника $T_м = T_ф$. В этом случае длина математического маятника равна приведенной длине физического маятника $l_{пр}$.

3. Рассчитать момент инерции математического маятника по формуле

$$J_м = m_0 l^2,$$

где m_0 – масса математического маятника, указанная на установке; l – длина нити, измеряемая линейкой.

4. Определить ускорение силы тяжести по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

5. Результаты измерений для математического маятника внести в табл. 1.

Таблица 1

	m_0, кг	l, м	n	t, с	$T_М$, с	g, м/с^2	$J_М$, кг·м^2
1 2 3							

6. Зная массу физического маятника m, а также расстояние d (от точки подвеса до центра инерции), рассчитать момент инерции маятника по формуле (14).

$$J_ф = l_{пр} \cdot md\ .$$

7. Все результаты занести в табл. 2.

Таблица 2

	$m_Ф$, кг	n	t, с	$T_Ф$, с	d, м	$J_Ф$, кг·м^2
1 2 3						

8. Рассчитать абсолютные и относительные погрешности определения ускорения свободного падения g и момента инерции физического маятника $J_ф$.

9. Найденные значения ускорения свободного падения и момента инерции физического маятника записать в виде

$$g = (g_{ср} \pm \Delta g),\ м/с^2$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} 100\%$$

$$J_ф = (J_{ф.ср} \pm \Delta J),\ кг \cdot м^2$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta J}{J} 100\%.$$

Задание 2. Определение момента инерции физического маятника в зависимости от распределения массы относительно оси вращения

1. Подвесить физический маятник на призму *4*. Укрепить груз *8* (или *8′*) в крайнем нижнем положении. Определить не менее 3-х раз период колебания T, измеряя время t 30-ти полных колебаний

$$T_1 = \frac{t_1}{n} = \frac{t_1}{30}.$$

2. Переместить груз во 2-е положение, а затем в 3-е, 4-е, 5-е (рис. 2) и определить периоды колебаний T_2, T_3, T_4 и T_5.

3. Измерить каждый раз расстояние d от точки подвеса до центра инерции с помощью призмы 9 (рис. 2).

4. Рассчитать момент инерции физического маятника по формуле (14)

$$J_{\text{ф}1} = g\frac{m_{\text{ф}}\, d_1\, T_1^2}{4\pi^2},$$

а также $J_{\text{ф}2}$, $J_{\text{ф}3}$, $J_{\text{ф}4}$, $J_{\text{ф}5}$.

Считать, что

$$m_{\text{ф}} = m_{\text{м}} + m_{\text{гр}},$$

где $m_{\text{м}}$ – масса маятника без груза, $m_{\text{гр}}$ – масса прикрепляемого груза.

5. Результаты опыта занести в табл. 3.

Таблица 3

Положение груза		n	t, с	T, с	d, м	$J_{\text{ф}}$, кг·м^2
1-е	1 2 3					
2-е	1 2 3					
3-е	1 2 3					
4-е	1 2 3					
5-е	1 2 3					

6. Построить график зависимости момента инерции $J_{ф}$ физического маятника от расстояния d от точки подвеса до центра инерции.

7. Сделать вывод о зависимости момента инерции физического маятника от распределения массы относительно оси вращения.

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим маятником, чему равен период колебаний математического маятника?

2. Что такое физический маятник, период колебаний физического маятника?

3. Какая длина называется приведенной длиной физического маятника, от чего зависит $l_{пр}$?

4. Что называется моментом инерции материальной точки? Что называется моментом инерции твердого тела, физический смысл момента инерции, единица измерения?

5. В чем суть теоремы Штейнера?

6. Как устроена установка для определения моментов инерции маятников?

7. Как экспериментально определить моменты инерции математического и физического маятников?

8. Зависит ли момент инерции от распределения массы относительно оси вращения?

9. Чему равен период колебаний физического маятника при $d \to 0$? Ответ обосновать.

10. Чему равен период колебаний физического маятника при $d \to \infty$? Ответ обосновать.

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель работы.

2. Теоретические основы использования метода колебаний математического и физического маятников для определения момента инерции.

3. Таблицы с результатами измерений моментов инерции твердых тел с помощью математического и физического маятников.

4. График зависимости $J_{ф}(d)$.

5. Расчет абсолютной и относительной погрешности измерений ускорения свободного падения g и момента инерции физического маятника $J_{\text{ф}}$.

6. Выводы по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия: момент инерции твердого тела, момент силы, математический маятник, физический маятник, приведенная длина физического маятника; умеет формулировать теорему Штейнера;

– решает типовые задачи на математический и физический маятники;

– овладел экспериментальными методами измерения моментов инерции твердых тел и ускорения свободного падения с помощью маятников;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 6
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментальная проверка основных законов кинематики и динамики поступательного движения тела.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление студентами основных понятий и законов кинематики и динамики.
2. Экспериментальное определение ускорения тел и проверка второго закона Ньютона.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Кинематика материальной точки

Механическое движение относительно. Для описания движения тела нужно указать, по отношению к какому телу рассматривается движение. Это тело называют **телом отсчета**. Система координат, связанная с телом отсчета, и часы для отсчета времени образуют **систему отсчета,** позволяющую определять положение движущегося тела в любой момент времени.

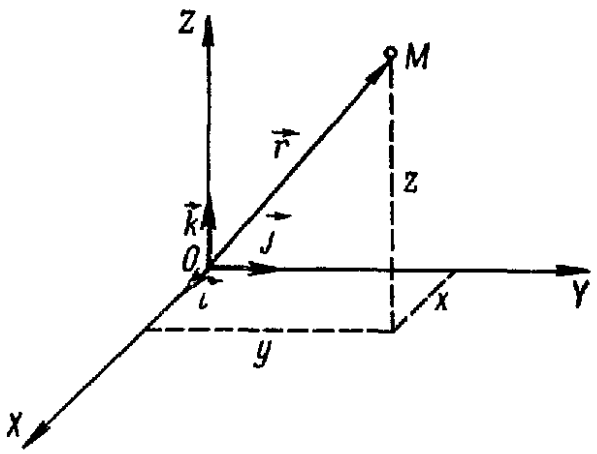

Рис. 1. Положение материальной точки в декартовой системе координат

В самом простом случае мы имеем дело с движением тела, размерами и формой которого в данных условиях можно пренебречь. Такое тело называется **материальной точкой.** Положение материальной точки в данный момент времени можно определить с помощью **радиус-вектора** $\vec{r}$, проведенного из начала, например, декартовой системы координат *XYZ* до данной материальной точки (рис. 1).

В ходе движения материальная точка описывает некоторую линию, которую называют **траекторией движения** (рис. 2). Положение материальной точки в любой момент времени можно найти, зная, как меняется $\vec{r}$ с течением времени, т.е. зависимость $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (**закон движения**). Прямолинейный отрезок, проведенный из т. A в т. B, называется **перемещением** частицы $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, **путь**, пройденным телом S, отсчитывается вдоль траектории.

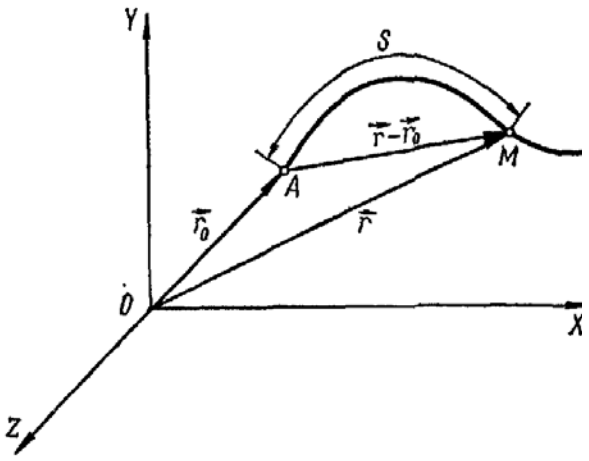

Рис. 2. Движение материальной точки

Скорость – это физическая величина, характеризующая направление и быстроту движения материальной точки (тела).

Мгновенная скорость равна первой производной радиус-вектора материальной точки по времени

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1)$$

Направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$ совпадает с направлением вектора перемещения $d\vec{r}$, т.е. скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории тела в сторону движения. При $\Delta t \to 0\ |d\vec{r}| = dS$ – длина вектора перемещения становится равной пройденному пути, и **модуль скорости равен первой производной пути по времени**

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{dS}{dt}. \qquad (2)$$

Путь dS, проходимый за единицу времени dt, как следует из (2)

$$dS = \upsilon dt.$$

Для нахождения длины пути, пройденного материальной точкой за время $\Delta t = t_2 - t_1$, надо проинтегрировать последнее выражение по времени в пределах от t_1 до t_2

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon\, dt. \qquad (3)$$

При равномерном движении

$$S = \upsilon \int_{t_1}^{t_2} dt = \upsilon\,(t_2 - t_1) = \upsilon\,\Delta t\,.$$

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро меняется скорость с течением времени по модулю и направлению. Физической величиной, определяющей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение материальной точки,** которое равно первой производной вектора скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (4)$$

Рассмотрим равнопеременное прямолинейное движение вдоль оси X (a=const). Из (4) получим закон изменения скорости с течением времени

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{a}\,dt;$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}\cdot t;$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm a\cdot t\,.$$

где υ_0 – начальная скорость тела; υ – скорость в момент времени t.

При равноускоренном движении знак «+», при равнозамедленном знак «–».

Длина пути при таком движении равна

$$S = \int_0^t \upsilon\,dt = \int_0^t (\upsilon_0 \pm at)\,dt = \upsilon_0\ t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (5)$$

В качестве меры механического воздействия одного тела на другое тело в механике вводят векторную величину, называемую **силой**. В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. В результате действия силы тело приобретает ускорение или изменяет свои размеры и форму.

Основным законом динамики является **второй закон Ньютона,** который устанавливает связь между взаимодействием тел и изменением характера движения. Наиболее общая форма записи второго закона Ньютона имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}. \qquad (6)$$

Учитывая, что масса материальной точки в классической механике величина постоянная, ее можно вынести из-под знака производной

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (7)$$

Из (6) получаем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (8)$$

Следовательно, приобретаемое телом ускорение прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела.

3.2. Определение ускорения тел с помощью машины Атвуда

Экспериментальная установка, получившая название «машина Атвуда», представляет собой вращающийся с пренебрежимо малым трением об ось легкий блок, через который переброшена тонкая нить с грузами на концах (рис. 3). Если на один из грузов массой M положить перегрузок массой m, система начнет двигаться равноускоренно. Будем считать, что нить невесома и нерастяжима, сопротивление в оси блока отсутствует, масса блока мала, сопротивление воздуха отсутствует.

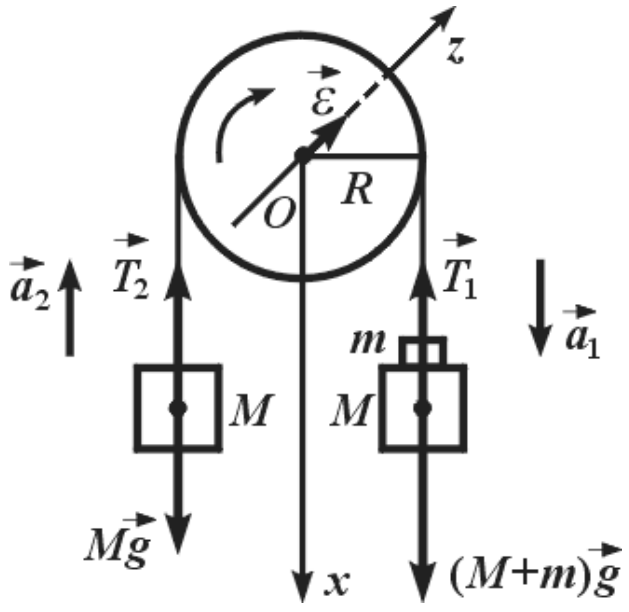

Рис. 3. Машина Атвуда

Действующие на грузы и перегрузок силы изображены на рис. 3.

Запишем второй закон Ньютона для груза и груза с перегрузком:

$$(M+m)\vec{a}_1 = (M+m)\vec{g} + \vec{T}_1;$$
$$M\vec{a}_2 = M\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (9)$$

Поскольку нить нерастяжима, то ускорения правого и левого грузов одинаковы по величине – $a_1=a_2=a_\text{Т}$. Пренебрегая массами блока и нити, можно считать, что силы натяжения равны $T_1=T_2=T$. Для удобства расчетов используем неподвижную систему координат, центр которой совмещен с осью блока, а ось OX направлена вниз (рис. 3)

$$(M+m)a_\text{Т} = (M+m)g - T;$$
$$Ma_\text{Т} = T - Mg. \qquad (10)$$

Складывая эти уравнения, получим теоретическое значение ускорения $a_\text{Т}$

$$a_\text{Т} = g\frac{m}{2M+m}. \qquad (11)$$

При равноускоренном движении ускорение можно найти экспериментально (5) зная путь S, который проходит груз за время t

$$a_\text{Э} = \frac{2S}{t^2}, \qquad (12)$$

где S – путь, пройденный грузами; t – время их движения.

3.3. Проверка второго закона Ньютона

Пусть в начале опыта на конце нити справа помещены перегрузки общей массой – m_1, а слева – массой m_2. Система уравнений динамики будет иметь вид

$$(M+m_1)\cdot a_1 = (M+m_1)g - T;$$
$$(M+m_2)\cdot a_1 = T - (M+m_2)g.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$(2M+m_1+m_2)a_1 = (m_1-m_2)g\,.$$

Найдем ускорение a_1 с которым движутся грузы

$$a_1 = \frac{(m_1-m_2)g}{2M+m_1+m_2}. \qquad (13)$$

Если после этого все перегрузки собрать на правом грузе M, уравнения движения имеют вид

$$(M + m_1 + m_2) \cdot a_2 = (M + m_1 + m_2)g - T;$$
$$M \cdot a_2 = T - Mg.$$

Откуда

$$(2M + m_1 + m_2)a_2 = (m_1 + m_2)g$$

и ускорение a_2 можно представить в виде

$$a_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{2M + m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Поделив (13) на (14), получим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}. \quad (15)$$

Отношение ускорений можно также найти, пользуясь законами кинематики, экспериментально определив время движения t_1, t_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{2S}{t_1^2}}{\frac{2S}{t_2^2}} = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (16)$$

Сравнение теоретического и экспериментального отношений (15) и (16) является одним из способов проверки II закона Ньютона на машине Атвуда.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Общий вид прибора Атвуда показан на рис. 4. На вертикальной колонке, закрепленной в основании, установлены верхняя втулка *1* и два подвижных кронштейна с фотоэлектрическими датчиками: нижний кронштейн *2*, средний *3*, для снятия перегрузков в форме дисков с прорезями. Основание оснащено регулируемыми ножками, которые позволяют произвести выравнивание положения прибора. На верхней втулке *1* при помощи верхнего диска *4* закреплен узел подшипника ролики и электромагнит, который после подключения к нему напряжения питания от электронного блока ФМ-11 удерживает систему грузов в состоянии покоя. Через ролик проходит нить с привязными на ее концах грузиками *5* и *6*.

Кронштейны можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в любом положении, устанавливая, таким образом, длину пути

равномерно-ускоренного *h* и равномерного движений *L*. Для облегчения определения этих путей на колонке имеется миллиметровая шкала, все кронштейны имеют указатель положения, а верхний красный указатель *7* – дополнительную черту, облегчающую точное согласование нижней грани верхнего большого грузика с выбранным началом пути движения.

На кронштейне *3* находится разъем для подключения электронного блока ФМ 10. На кронштейне *2* находится разъем для подключения электронного блока ФМ 11. Кронштейн *3* снимает с падающего вниз большого грузика *6* дополнительный грузик – кольцо.

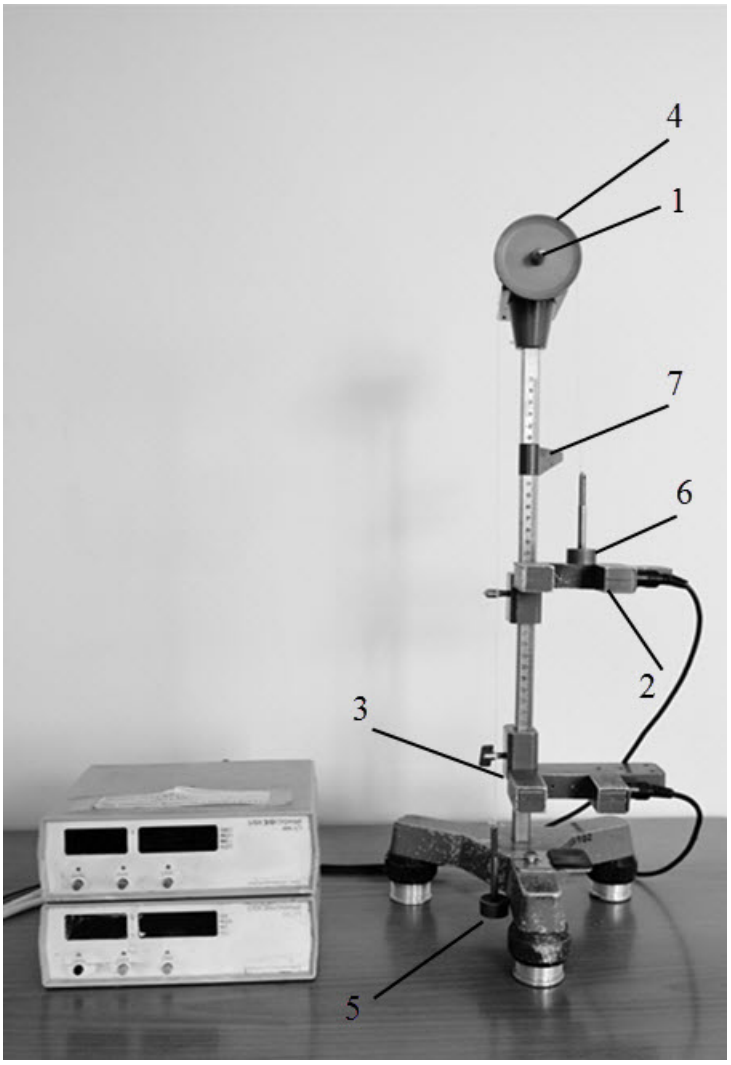

Рис. 4. Экспериментальная установка

На лицевой панели электронного блока ФМ расположены следующие элементы управления:

«Сброс» – нажатие клавиши вызывает обнуление схем электросекундомера;

«Пуск» – нажатие клавиши вызывает освобождение электромагнита и генерирование импульса, разрешающего измерение;

«Стоп» – нажатием клавиши может быть остановлен электросекундомер.

На задней панели кнопка «СЕТЬ», которая включает электромагнит, удерживающий систему грузов в покое.

5. ТРЕБОВАНИЕ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде, чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и оборудованием.
2. О замеченных неисправностях немедленно сообщите лаборанту или преподавателю.
3. Устанавливать оба кронштейна следует так, чтобы правый грузик, двигаясь, свободно проходил через них.
4. Следите за тем, чтобы нить с грузами не слетала с диска.
5. По окончании работы приведите в порядок рабочее место.

6. ЗАДАНИЯ

1. Определение ускорения тел.
2. Проверка второго закона Ньютона.
3. Определение кинематических характеристик движущихся тел.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задания для выполнения выбираются по указанию преподавателя.

Задание 1. Определение ускорения тел

1. Включить в сеть шнур питания прибора.
2. Переместить нить с грузами так, чтобы правый груз занял верхнее положение. Согласовать нижнюю грань большого правого грузика с чертой, нанесенной на верхнем красном указателе *7*.
3. Нажать на кнопку «СЕТЬ» электросекундомера, при этом включается электромагнит, удерживающий систему в положении покоя.
4. Положить на правый груз один из перегрузков.

5. Определить пройденный грузами путь по шкале, как расстояние от нижнего основания правого груза до индекса нижнего кронштейна *3*.

6. Нажать на кнопку «СБРОС» электросекундомера.

7. Нажать на кнопку «ПУСК».

8. Записать по показаниям электросекундомера время движения груза.

9. Повторить с выбранным перегрузком опыт не менее трех раз. Результаты занести в табл. 1.

Таблица 1

m, кг	№ изм.	t, с	$t_{ср}$, с	S, м	a_T, м/с^2	$a_Э$, м/с^2
m_1	1					
	2					
	3					
m_2						
m_3						

10. Определить по результатам опыта среднее значение времени и рассчитать по формуле (12) экспериментальное значение ускорения $a_Э$.

11. Определить абсолютную и относительную погрешности измерения.

12. Вычислить теоретическое значение ускорения $a_Т$ по формуле (11). Сравнить теоретическое и экспериментальное значения ускорений.

13. Опыт повторить с другими перегрузками.

Задание 2. Проверка второго закона Ньютона

1. На правый большой грузик положить дополнительный грузик массой m_1 а на левый дополнительный грузик большей массы – m_2.

2. Согласовать нижнюю грань большого правого грузика с чертой, нанесенной на верхнем красном указателе *7*.

3. Привести систему в движение, нажав клавишу «Пуск» электросекундомера.

4. Измерить время движения грузов t_1 на пути S.

5. Измерения повторить не менее 5-ти раз. Найти среднее значение времени, рассчитать погрешность.

6. На правый большой грузик положить оба дополнительных грузика m_1 и m_2. Повторить действия пунктов 2, 3, 4, 5, определить время движения грузов t_2 на пути S.

9. Вычислить теоретическое отношение ускорений по формуле (15) и сопоставить с экспериментальным отношением (16).

10. Все данные и результаты вычислений занести в табл. 2.

Таблица 2

№ изм.	t_1, с	t_2, с	a_1/a_2	$(t_2/t_1)^2$
1				
2				
3				
4				
5				
Среднее значение				

11. По полученным результатам сделать вывод о выполнимости II закона Ньютона в условиях опыта.

Задание 3. Определение кинематических характеристик движущихся тел

Если на правый грузик положить небольшой перегрузок (кольцо) массы m_o, то система тел начнет двигаться с ускорением и пройдет путь h. На кольце дополнительный грузик отцепляется и дальше грузики M пройдут равномерно путь L (действием силы трения пренебрегаем). В данном задании необходимо определить скорость грузов на равномерном участке пути L, ускорение на участке h (рис. 5).

1. На правый большой грузик положить кольцо.

2. Согласовать нижнюю грань правого грузика с чертой, нанесенной на верхнем красном указателе *7*.

3. Измерить при помощи шкалы на колонке заданные пути равномерно ускоренного h и равномерного L движений большого грузика.

4. Привести систему в движение, нажав одновременно клавиши «Пуск» на обоих электросекундомерах.

5. Измерить время движения большого грузика на пути h по показаниям верхнего электросекундомера *10*, и $S=h+L$ по показаниям нижнего электросекундомера. Найти значение времени на пути L, как разность показаний времени на пути h и времени на пути S. Измерения времени повторить не менее 5-ти раз.

6. Определить скорость равномерного движения грузов и ускорение грузов на участке равноускоренного движения, необходимые формулы получить самостоятельно. Все данные занести в табл. 3.

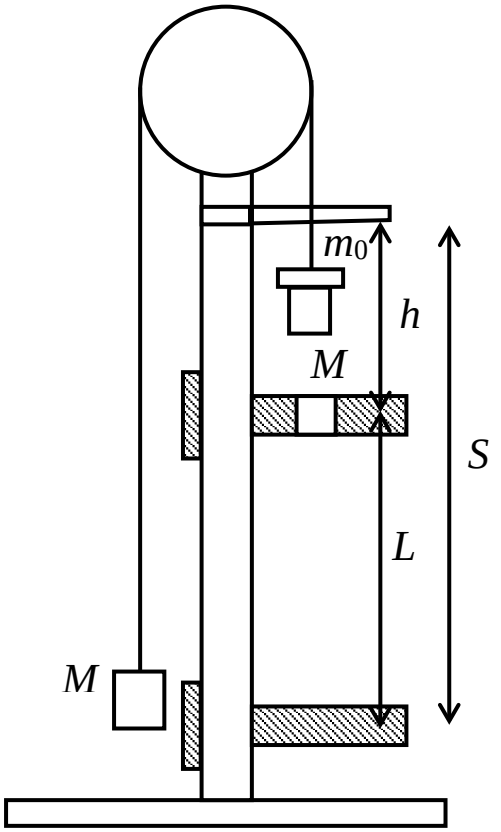

Рис. 5. Параметры установки

Таблица 3

№ изм.	h, м	L, м	t, с	υ, м/с	a, м/с^2
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее значение					

7. Определить абсолютную и относительную погрешности измерения скорости и ускорения системы.

Контрольные вопросы

1. Что называется материальной точкой? Системой отсчета?
2. Что называется траекторией? Как подразделяются движения по виду траектории?
3. Что такое перемещение? Что такое путь? При каких движениях путь и модуль перемещения совпадают?
4. Что называют радиус-вектором, мгновенной и средней скоростью, ускорением?
5. Как формулируется основной закон динамики поступательного движения?
6. Как определяется ускорение тела на машине Атвуда?
7. Как проверяется второй закон Ньютона в данной работе?
8. Какие причины влияют на расхождение теоретического и экспериментального значений ускорения?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель работы.
2. Теоретические основы использования машины Атвуда для определения кинематических характеристик движущихся тел и проверки второго закона Ньютона.
3. Таблицы с данными измерений и результатами расчетов.
4. Расчет погрешностей измерений скорости и ускорения системы логарифмическим или дифференциальным методами.
5. Выводы по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия тела отсчета, системы отсчета, материальной точки, радиус-вектора, траектории, перемещения, пути, скорости, ускорения;

– овладел знанием методики определения кинематических характеристик поступательного движения, проверки второго закона Ньютона с помощью машины Атвуда;

– правильно выполнил экспериментальную и расчетную части работы;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.
3. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.

Лабораторная работа № 7
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОУДАРЕНИЯ ТЕЛ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Проверка выполнения законов сохранения импульса и механической энергии при соударении твердых тел.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Законы сохранения в механике».
2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Импульс. Энергия. Законы сохранения

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называют **механической системой** (**системой**). Замкнутой называют систему тел, взаимодействующих между собой и не взаимодействующих с телами, не входящими в данную систему.

Векторную величину, численно равную произведению массы m_i материальной точки на ее скорость $\vec{\upsilon}_i$ и имеющую направление скорости, называют импульсом материальной точки, т.е.

$$\vec{p}_i = m_i \vec{\upsilon}_i .$$

Векторную сумму импульсов частиц, образующих механическую систему, называют импульсом системы

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ \vec{\upsilon}_i \ .$$

Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F} ,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$ – векторная сумма сил, действующих на каждую из материальных точек системы.

В случае замкнутой системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

Следовательно, для замкнутой системы импульс $\vec{p}$ постоянен. Это утверждение составляет содержание **закона сохранения импульса**, который формулируется следующим образом: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным*

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}.$$

Если система не замкнута, то ее импульс может меняться, но его изменение обязательно равно

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt.$$

Силу называют **консервативной**, если работа, совершаемая этой силой, зависит только от начального и конечного положений тела и не зависит от траектории, по которой оно двигалось. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такую силу называют **диссипативной** (или неконсервативной). Силы, с которыми на данное тело действуют остальные тела системы, называют **внутренними**; силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в систему, – **внешними.**

Работу консервативной силы, совершаемую над материальной точкой, всегда можно представить разностью значений некоторой функции $П$ в начальном и конечном состояниях точки, т.е. изменением этой функции при совершении работы, взятом с обратным знаком

$$A_{\text{конс}} = П_1 - П_2 = -(П_2 - П_1) = -\Delta П. \qquad (1)$$

Эту функцию называют **потенциальной энергией** материальной точки. В общем случае она зависит от положения материальной точки в пространстве и времени, т.е. зависит от координат и времени. Если же в любой точке пространства сила со временем не меняется, то потенциальная энергия зависит только от координат. Потенциальная энергия системы представляет собой сумму потенциальных энергий материальных точек, из которых состоят тела системы. Она определяется как взаимным расположением тел и их частей друг относительно друга, так

и характером взаимодействия между ними и может служить мерой этого взаимодействия.

Величину K, изменение которой равно суммарной работе всех сил, действующих на материальную точку, называют **кинетической энергией**. Полагая ее равной нулю для покоящейся материальной точки, приходим к тому, что кинетическая энергия точки, движущейся со скоростью $\vec{\upsilon}$, равна работе, совершаемой приложенными к ней силами при приобретении этой скорости. При скорости υ, много меньшей скорости света, согласно определению, она равна

$$K = \int_0^{\upsilon} dA = \int_0^{\upsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\upsilon} m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \vec{\upsilon}\, dt = m \int_0^{\upsilon} \vec{\upsilon}\, d\vec{\upsilon} = m \int_0^{\upsilon} \upsilon \cdot \cos 0^0\, d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела и системы тел находится суммированием кинетических энергий материальных точек, из которых состоят тела. Она зависит только от их масс и скоростей и может служить мерой движения тел.

Представим работу A результирующей всех сил, действующих на тела системы, суммой работ

$$A = A_{\text{конс}} + A', \qquad (2)$$

где $A_{\text{конс}}$ – работа консервативных сил, действующих на тела системы; A' – работа всех диссипативных сил, как внутренних, так и внешних.

Так как $A = K_2 - K_1$, то с учетом (1) уравнение (2) можно зависать в виде:

$$K_2 - K_1 = П_1 - П_2 + A'$$

или

$$(K_2 + П_2) - (K_1 + П_1) = A'. \qquad (3)$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют **полной механической энергией** или просто **механической энергией**. Обозначив ее как E, уравнение (3) запишем в виде

$$E_2 - E_1 = A'.$$

При $A' = 0$

$$E = K + П = \text{const}. \qquad (4)$$

Получаем **закон сохранения механической энергии**: *полная механическая энергия системы тел, на которую действуют лишь консервативные силы, остается постоянной*.

Если на тела системы наряду с консервативными действуют и диссипативные силы (например, силы трения, силы сопротивления), механическая энергия таких систем не сохраняется, но ее изменение при этом всегда равно работе диссипативных сил.

3.2. Соударение тел

Различают два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

Абсолютно упругим ударом называется такой удар, при котором кинетическая энергия соударяющихся тел не преобразуется в другие виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга, и разлетаются со скоростями, модуль и направление которых определяются законом сохранения импульса и законом сохранения механической энергии. Идеально упругих ударов в природе не существует, так как всегда часть энергии затрачивается на необратимую деформацию тел и увеличение их внутренней энергии. Для некоторых тел, например, шаров, изготовленных из стали или слоновой кости, потерями механической энергии можно пренебречь. Однако даже в этом случае часть механической энергии соударяющихся шаров превращается в энергию звуковой волны, которую мы слышим во время удара.

При **абсолютно неупругом ударе** происходят различного рода процессы в соударяющихся телах (пластические деформации, трение и др.), в результате которых механическая энергия системы преобразуется в ее внутреннюю энергию. Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает, кинетическая энергия полностью или частично превращается во внутреннюю энергию тел. Столкнувшиеся тела после удара либо движутся вместе с одинаковой скоростью, либо покоятся. Примером такого удара будет соударение глиняных шаров, стального и пластилинового шаров. Для абсолютно неупругого удара выполняется закон сохранения импульса, закон сохранения механической энергии не соблюдается.

Удар называют **центральным**, если до удара тела движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

3.3. Центральный удар двух шаров

Рассмотрим два шара, подвешенных рядом так, что их центры находятся на одном уровне. Отведем один из шаров на некоторый угол α и отпустим без начальной скорости (рис. 1).

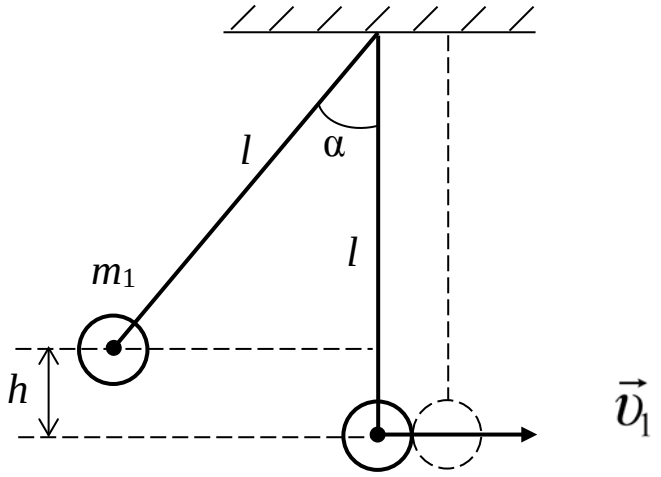

Рис. 1. Центральный удар шаров

Отклоненный шар будет двигаться вниз, разгоняясь, при этом его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую. Пренебрегая силами сопротивления воздуха и учитывая, что сила натяжения нити работы не совершает, можем записать

$$m_1 g h = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}, \qquad (5)$$

где m_1 – масса шара; g – ускорение свободного падения; h – высота шара в отведенном положении относительно нижней точки траектории; υ_1 – скорость первого шара в нижней точке перед соударением со вторым.

Из рисунка видно, что

$$h = l - l\cos\alpha, \qquad (6)$$

где l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести шара; α – угол начального отклонения нити.

Подставляя (6) в (5) и преобразуя уравнение, найдем выражение для скорости через угол начального отклонения нити

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (7)$$

Если после удара шары разлетаются в разные стороны на углы α_1 и α_2 соответственно, то скорости υ_1' и υ_2' (рис. 2) шаров непосредственно после удара будут равны

$$\upsilon_1' = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2}, \qquad (8)$$

$$\upsilon_2' = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_2}{2}.$$

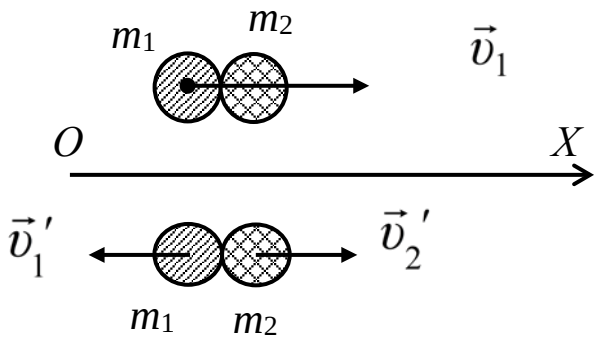

Рис. 2. Соударение двух шаров

Для системы, состоящей из двух шаров, в момент удара векторная сумма внешних сил – сил тяжести и сил натяжения нитей не равна нулю. Однако проекция внешних сил на ось *OX* равна нулю. В этом случае проекция импульса системы на ось *OX* будет сохраняться во время удара

$$p_x = \sum_{i=1}^{n} p_{x_i} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что проекция импульса системы на ось *OX* до удара равна проекции импульса на ось *OX* после удара и

$$m_1\upsilon_{1x} = m_1\upsilon_{1x}' + m_2\upsilon_{2x}', \qquad (9)$$

где m_1 и m_2 – массы соударяющихся шаров, υ_{1x} – проекция на ось *OX* скорости бьющего шара непосредственно перед ударом, υ_{1x}' и υ_{2x}' – проекции на ось *OX* скоростей бьющего и покоящегося шаров сразу после удара.

Для случая, показанного на рис. 2, уравнение (9) будет иметь вид

$$m_1 \upsilon_1 = m_2 \upsilon_2' - m_1 \upsilon_1'. \qquad (10)$$

Если после соударения шары двигаются как одно целое и после удара они отклоняются на угол β, то их скорость после удара

$$\upsilon' = \upsilon_1' = \upsilon_2' = 2\sqrt{g\,l}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad (11)$$

Коэффициент восстановления скорости k определяется как отношение относительной скорости шаров после удара к относительной скорости шаров до удара

$$k = \frac{\upsilon'_{\text{отн}}}{\upsilon_{\text{отн}}} = \left|\frac{\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_1'}{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}\right| \qquad (12)$$

Для случая, показанного на рис. 1 и рис. 2, формулу (12) с учетом (7) и (8) можно преобразовать к виду

$$k = \frac{\upsilon_2' + \upsilon_1'}{\upsilon_1} = \frac{\sin\frac{\alpha_2}{2} + \sin\frac{\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (13)$$

Фактически коэффициент восстановления скорости k характеризует «степень упругости» удара: чем ближе k к единице, тем удар более упругий, а значит, столкнувшиеся тела в большей степени восстанавливают свою форму. Для абсолютно упругого удара $k = 1$. В случае столкновения реальных шаров столкновение не является абсолютно упругим и $k < 1$.

Кинетическая энергия системы до удара равна

$$E_{\text{нач}} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^{\,2}, \qquad (14)$$

а после соударения в случае абсолютно упругого удара

$$E_{\text{кон}} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^{\,2} \qquad (15)$$

или в случае абсолютно неупругого удара

$$E_{\text{кон}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon'^{2}. \qquad (16)$$

Энергию W, перешедшую во внутреннюю энергию при соударении шаров, можно определить как

$$W = E_{\text{нач}} - E_{\text{кон}}. \qquad (17)$$

Из уравнений (13), (14) и (15) следует, что энергия W равна

$$W = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2) = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} \cdot \delta. \qquad (18)$$

Величина δ представляет собой долю начальной механической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию.

Из (18) следует, что доля механической энергии, переходящей во внутреннюю энергию, зависит не только от «степени упругости» удара k, но и от соотношения масс соударяющихся тел.

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на тело, равна скорости изменения импульса этого тела

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}. \qquad (19)$$

Если известна длительность удара τ, то, используя (19), по изменению импульса одного из шаров (например, покоящегося до удара) можно определить среднюю силу взаимодействия между шарами

$$\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{m_2 \vec{\upsilon}_2' - m_2 \vec{\upsilon}_2}{\tau}$$

или так как шар покоился до удара $\upsilon_2 = 0$

$$\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{m_2 \vec{\upsilon}_2'}{\tau}. \qquad (20)$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Общий вид установки для исследования столкновения шаров представлен на рис. 3.

Установка состоит из основания *1*, горизонтальное положение которого можно отрегулировать с помощью опор *2*. На основании закреплена колонка со шкалой *3*, на которой находятся кронштейны *4* и *5*. На верхнем кронштейне установлено устройство *6*, предназначенное для крепления нитей *7*. На нижнем кронштейне расположены шкалы *9, 10* для определения углов отклонения шаров и электромагнит *11*. С помощью болта *12* электромагнит можно передвигать вдоль правой шкалы и фиксировать высоту его установки. Шары *13* подвешивают на нитях к верхнему кронштейну. В набор шаров входят стальной, алюминиевый,

латуневый и пластилиновый шары. Питание электромагнита осуществляют от электронного блока ФМ-1/1.

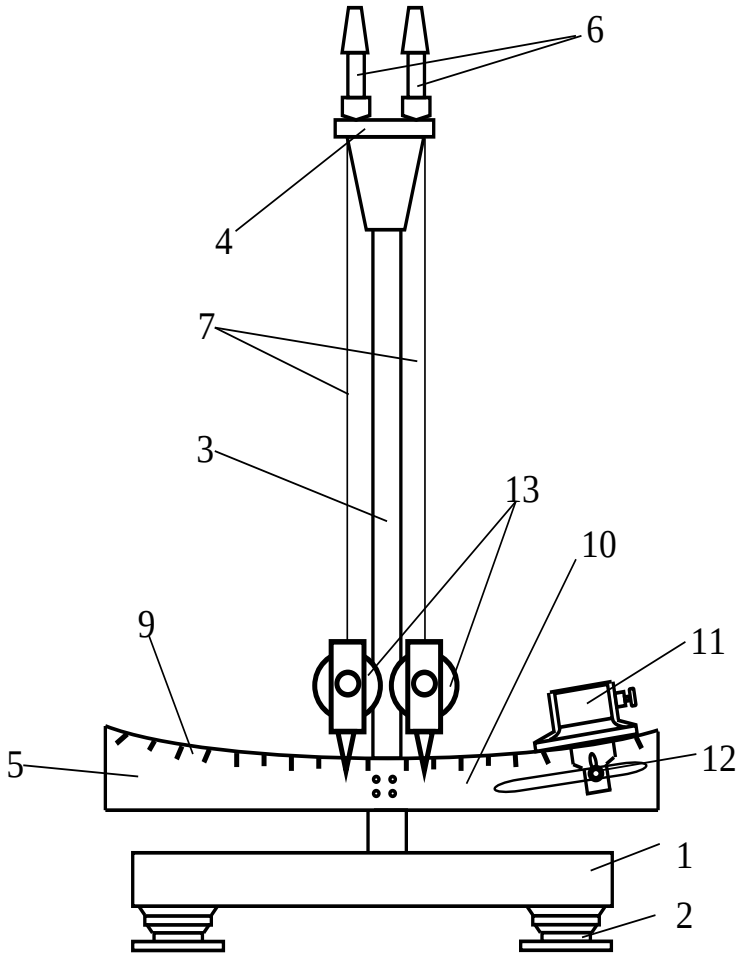

Рис. 3. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданиями и лабораторной установкой. Проверьте заземление лабораторной установки и изоляцию токоведущих проводов. О замеченных неисправностях сообщите преподавателю.

2. Не загромождайте рабочее место предметами, не относящимися к выполняемой работе.

3. Не оставляйте без присмотра лабораторную установку.

4. По окончании работы обесточьте прибор и приведите в порядок рабочее место.

6. ЗАДАНИЯ

1. Проверка закона сохранения импульса при центральном ударе двух шаров. Определение энергии, перешедшей во внутреннюю энергию при соударении шаров.

2. Определение силы взаимодействия шаров при столкновении.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Проверка закона сохранения импульса при центральном ударе двух шаров. Определение коэффициента восстановления скорости и потери кинетической энергии в процессе соударения

1. Вставьте стальные шары *13* (см. рис. 3) в скобы подвеса. С помощью регулировочных опор *2* выставьте основание *1* установки таким образом, чтобы нижние визиры скоб подвеса указывали на нули шкал *9*, *10*.

2. Отрегулируйте положение шаров в вертикальной и горизонтальной плоскостях до совмещения верхних визиров скоб подвеса, изменяя длину подвеса шаров и (или) положение узлов крепления нитей на верхнем кронштейне.

3. Отведите правый шар и зафиксируйте его с помощью электромагнита. Определите начальный угол отклонения шара α.

4. Нажмите клавишу «ПУСК» электронного блока и измерьте углы отклонения шаров α_1 и α_2 после их столкновения.

5. Измерения по пунктам *3* и *4* проведите 3 раза.

6. Найдите средние значения каждого из углов $\alpha_{1ср}$ и $\alpha_{2ср}$. По формуле (7) определите скорость υ_1 первого шара перед ударом. Используя средние значения углов отскока шаров, по формулам (8) определите скорости шаров сразу после удара υ_1' и υ_2'.

7. Вычислите отношения импульсов системы шаров до и после удара. По указанию преподавателя оцените погрешности полученных результатов. Проверьте выполнение закона сохранения импульса *9*.

8. По формуле (13) рассчитайте коэффициент k восстановления скорости. По формуле (18) определите энергию W, перешедшую во внутреннюю энергию при соударении шаров, и долю δ начальной механической энергии, перешедшей во внутреннюю.

9. Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 1.

10. Пункты 3–9 повторите еще два раза для двух других пар из набора шаров (пластилиновые шары предварительно должны быть согреты в руках, чтобы при столкновении происходило их слипание).

Таблица 1

Типы шаров	m_1, кг	m_2, кг	α, град	α_1, град	α_2, град	β, град	υ_1, м/с	υ_1', м/с	υ_2', м/с	$\frac{m_1\upsilon_{1x}' + m_2\upsilon_{2x}'}{m_1\upsilon_1}$	k	δ

Задание 2. Оценка средней силы удара

1. Задание выполняется по указанию преподавателя.

2. Подключите электромагнит *11* и клеммы верхнего кронштейна к электронному блоку.

3. Вставьте металлические шары *13* в скобы подвеса. С помощью регулировочных опор *2* выставьте основание *1* установки так, чтобы нижние визиры скоб подвеса указывали на нули шкал *9*, *10*.

4. Отрегулируйте положение шаров в вертикальной и горизонтальной плоскостях до совмещения верхних визиров скоб подвеса. Регулировку провести, изменяя длину подвеса шаров и (или) положение узлов крепления нитей на верхнем кронштейне.

5. На пульте блока нажмите кнопку «СБРОС». При этом на табло индукции высветятся нули, на электромагнит будет подано напряжение.

6. Отведите правый шар и зафиксируйте его с помощью электромагнита. Определите начальный угол отклонения шара α.

7. Нажмите кнопку «ПУСК», при этом произойдет удар шаров. По таймеру блока определите время соударения шаров τ.

8. Отклоните правый шар на угол α, зафиксируйте его электромагнитом.

9. Нажмите клавишу «ПУСК» электронного блока и измерьте угол отклонения первоначально покоящегося шара α_2 после столкновения.

10. Измерения по пунктам 6–9 проведите 3 раза.

11. Найдите среднее значение угла $\alpha_{2ср}$. По формуле (8) определите скорость υ_2' первоначально покоящегося шара после удара.

12. Используя найденное значение υ_2' и среднее значение времени соударения шаров $\tau_{ср}$ по формуле (20) определите среднюю силу $F_{ср}$, с которой шары действуют друг на друга во время удара.

13. Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 2.

Таблица 2

Типы шаров	m_2, кг	α, град	α_2, град	$\alpha_{2ср}$, рад	τ, с	$\tau_{ср}$, с	$F_{ср}$, Н
			1. 2. 3.		1. 2. 3.		
			1. 2. 3.		1. 2. 3.		
			1. 2. 3.		1. 2. 3.		

14. Пункты 5–12 повторите еще два раза для других пар металлических шаров.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под импульсом тела?
2. Что такое механическая энергия? Какую энергию называют кинетической? Какую энергию называют потенциальной?
3. Как формулируются законы сохранения импульса и энергии?
4. Если импульс и энергия системы не сохраняются, то чему равны изменения этих величин?
5. Что такое удар? Какой удар называют абсолютно упругим (неупругим)?
6. В чем отличия и сходства абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов?
7. Какие законы сохранения можно использовать при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударе?

8. Как рассчитать среднюю силу взаимодействия между шарами?

9. В чем заключается идея эксперимента?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Краткую теорию и основные формулы для выполнения расчетов.
3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.
4. Вывод по результатам работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия механическая система, импульс, внешние и внутренние, консервативные и диссипативные силы, формулирует законы сохранения импульса и энергии и приводит примеры использования этих законов на практике;

– умеет рассчитывать коэффициент восстановления скорости, долю начальной механической энергии, переходящей во внутреннюю энергию при ударе, умеет определять среднюю силу взаимодействия тел при соударении;

– решает типовые задачи с использованием законов сохранения импульса и энергии;

– правильно выполнил экспериментальную и расчетную части работы;

– составил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиям;

– сформулировал выводы по проделанной работе;

– дал полные ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2016.

Лабораторная работа № 8
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение стоячих волн в трубе.
2. Определение скорости звука в воздухе.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление студентами основных понятий: звук, бегущая и стоячая волны, условий образования стоячих волн.
2. Экспериментальное нахождение скорости звуковой волны в воздухе.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Звуковые волны

При изучении распространения механических колебаний в газах, жидкостях и твердых телах отвлекаются от атомно-молекулярного строения этих тел и рассматривают их как сплошные среды. Под **частицей среды** понимают малый элемент объема, размеры которого, во много раз больше межмолекулярных расстояний (в газах при нормальных условиях порядка 10^{-8} м). Упругие свойства среды зависят от агрегатного состояния. Например, газы способны сопротивляться изменению их объема – обладают объемной упругостью. Все среды (за исключением разряженных газов) можно считать абсолютно упругими, так как внутренние силы, возникающие при достаточно малых деформациях, оказываются пропорциональными величинам деформаций.

Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания будут распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью υ. Механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде, называются упругими волнами. Упругая волна называется **продольной**, если колебания частиц происходят вдоль направления распространения волны. Продольные волны наблюдаются в твердых телах, жидкостях и газах.

Если частицы смещаются перпендикулярно направлению распространения волны, то это **поперечная волна**. Поперечные

звуковые волны могут распространяться в различных средах, но в жидкостях и газах они очень быстро затухают, поэтому наблюдать поперечные волны легче всего в твердых телах.

Звуковыми волнами называются продольные волны в упругой среде, воспринимаемые органами слуха человека. Они представляют собой распространение колебаний плотности ρ и давления P (сгущений и разряжений среды). Для человека диапазон воспринимаемых частот лежит в интервале от 16 Гц до 20 кГц.

3.2. Основные физические величины, характеризующие распространение звука

При распространении звуковой волны в атмосферном воздухе в каждом сколь угодно малом микрообъеме пространства происходит попеременно деформации сжатия и разрежения воздуха, что приводит к изменению давления в среде по сравнению с атмосферным давлением. Переменная величина – разность между атмосферным давлением и давлением в данной точке среды называется **звуковым давлением** $P_{зв}$ которое иногда называют избыточным.

Если обозначить давление и плотность газа при отсутствии в нем звуковой волны соответственно как P_0 и ρ_0, то при наличии волны давление и плотность в каждой точке газа (т.е. микрообъеме) будут определяться как $P=P_0+P_{зв}$ и $\rho=\rho_0+\rho_{зв}$. Изменение давления и плотности очень малы $P_{зв}<<P_0$ и $\rho_{зв}<<\rho_0$. При распространении звуковой волны, создаваемой в обычном разговоре, в отдельных участках пространства избыточное давление составляет около миллионной доли атмосферного давления. Деформации сжатия соответствует положительное значение звукового давления, деформации разрежения – отрицательное. Звуковое давление является функцией времени и координат $P=P_{зв}(x,y,z,t)$. Плотность связана с давлением и также является переменной величиной $\rho = \rho_{зв}(x,y,z,t)$.

На рис. 1 изображены колебания давления и плотности в плоской звуковой волне. В каждой точке среды звуковое давление действует одинаково во все стороны, является скалярной величиной и представляет собой модуль силы, действующей перпендикулярно на единицу площади поверхности. В системах вещания и связи имеют дело со звуковым давлением, не превышающим значение в 100 Па.

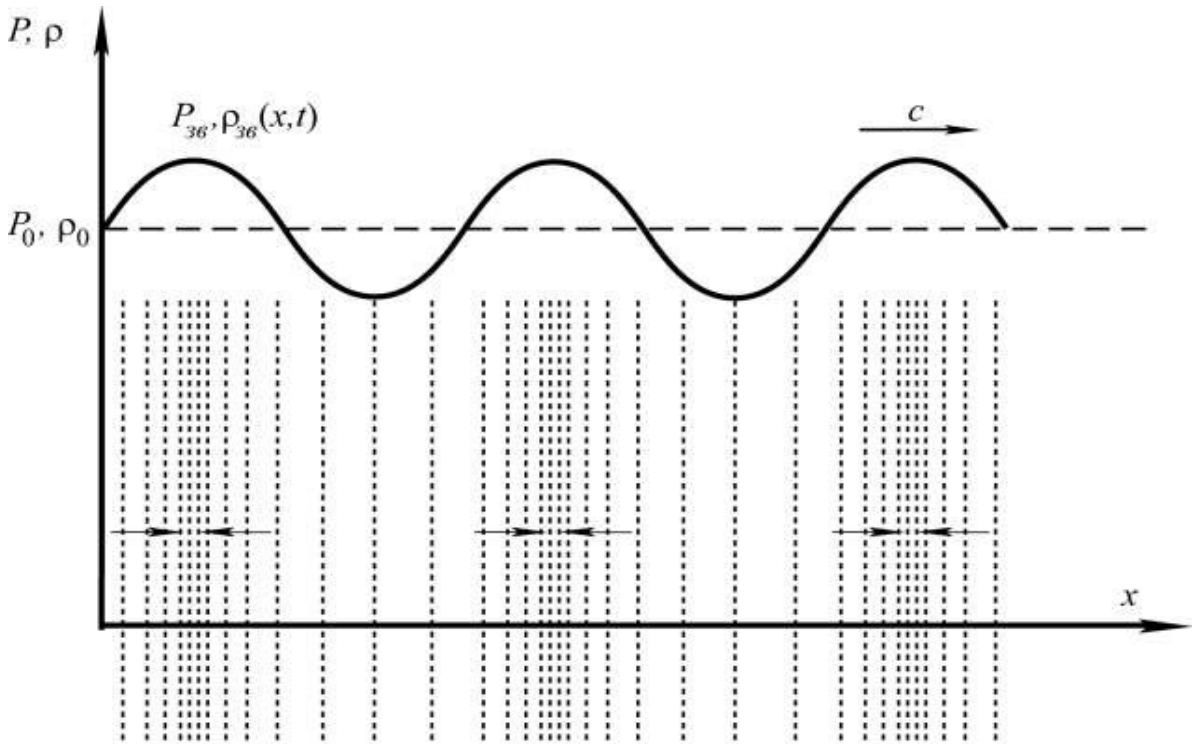

Рис. 1. Колебания давления и плотности в гармонической звуковой волне связаны с образованием чередующихся областей разрежения и сгущения частиц

Помимо звукового давления, величиной, характеризующей звуковую волну, является **смещение** частиц S – это отклонение частиц среды от равновесного положения при прохождении этой волны. Штриховые линии визуализируют слои частиц, положения равновесия которых в плоской волне перпендикулярны оси x. Стрелками показано смещение S частиц при распространении волны в среде. Из рисунка видно, что при распространении продольной волны в среде создаются чередующиеся области сгущения и разрежения частиц, перемещающиеся в направлении распространения волны со скоростью υ. В действительности, отдельные молекулы газа движутся хаотически, но расположенные в некотором объеме частицы в совокупности образуют области сжатия и разрежения среды.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к произвольному моменту времени t, называется **волновым фронтом.** Геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе, называется **волновой поверхностью.**

Волновые поверхности могут быть любой формы, в простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Расстояние, на

которое распространяется волна за время равное периоду колебаний частиц среды, называется **длиной волны** – λ.

Частицы, отстоящие друг от друга на λ, колеблются с разностью фаз равной 2π, т.е. синфазно. Очевидно, что

$$\lambda = \upsilon T,$$

где υ – скорость волны; T – период колебаний. Величина обратная периоду, называется частотой или **линейной частотой** – ν

$$\nu = 1/T.$$

С учетом этого выражения получаем соотношение

$$\upsilon = \lambda\nu. \qquad (1)$$

Скорость распространения волн в газах равна

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

где γ – коэффициент Пуассона газа, для воздуха γ = 1,44; μ – молярная масса газа; R – газовая постоянная. Например, в воздухе (M=29·10^{-3} кг/моль) при нормальных условиях υ=331,5 м/с.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Экспериментальное определение скорости звука методом стоячих волн в трубе

Скорость звука может быть определена экспериментально различными методами. В настоящей работе используется метод стоячих волн, возникающих в трубе. Для объяснения его сущности воспользуемся следующей математической моделью.

4.1. Уравнения плоской волны

Для примера рассмотрим смещение S малых по объему участков среды («частиц среды») относительно их положения равновесия: $S=S(x, y, z, t)$, где (x, y, z) – координаты частицы. Зависимость S от пространственных координат и времени называется **уравнением волны.**

Эта функция должна быть периодической как относительно времени t, так как описывает колебание частиц, так и относительно координат, так как точки отстоящие друг от друга на расстояние λ, колеблются одинаковым образом.

Опишем вид функции $S(x, y, z; t)$ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят **гармонический** характер, и ось x совпадает с направлением распространения волны. Волновые

поверхности будут перпендикулярны к оси x и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение S будет зависеть только от x и t

$$S = S(x; t).$$

Колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x будут иметь вид

$$S = S_0 \cos\left[\omega(t - x/\upsilon) + \varphi\right], \qquad (2)$$

где S_0 – амплитуда; $\omega=2\pi\nu$ – циклическая частота; φ – начальная фаза волны, которая определяется выбором начала отсчета x и t, $[\omega(t\text{-}x/\upsilon)+\varphi]$ – фаза волны.

Зафиксируем какое-либо значение фазы, положив

$$\omega(t - x/\upsilon) + \varphi = \text{const}.$$

Это выражение определяет связь между временем t и той пространственной координатой x, в которой фаза имеет одно и то же значение. Продифференцировав по времени и координате

$$dt - dx/\upsilon = 0.$$

Откуда

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon. \qquad (3)$$

Таким образом, скорость в уравнении волны (2) представляет собой скорость перемещения фазы, поэтому ее называют **фазовой скоростью**.

Уравнение (2) соответствует волне, распространяющейся в сторону увеличения x. Волна, распространяющейся в сторону уменьшения x будет соответствовать уравнению

$$S = S_0 \cos\left[\omega(t + x/\upsilon) + \varphi_1\right].$$

Уравнению плоской волны можно придать симметричный вид относительно x и t вводя величину $k=2\pi/\lambda$, называемую **волновым числом**.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{\upsilon}.$$

Уравнение плоской бегущей волны выразится

$$S = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

4.2. Уравнение стоячей волны

Стоячие волны образуются в результате наложения волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Чаще всего стоячие волны возникают при отражении волн от преград.

Запишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях с одинаковыми амплитудами, частотами и нулевыми начальными фазами:

$$S_1 = S_0 \cos(\omega t - kx), \qquad (4)$$
$$S_2 = S_0 \cos(\omega t + kx).$$

Сложив эти уравнения, получим уравнение стоячей волны

$$S = S_1 + S_2 = 2S_0 \cos(kx)\cos\omega t = 2S_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

или

$$S = \left(2S_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\omega t. \qquad (5)$$

Из полученного уравнения следует, что в каждой точке пространства происходят колебания той же частоты ω с амплитудой $\left|2S_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$, зависящей от координаты x данной точки.

В точках среды, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \text{ или } \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi (n = 0, 1, 2...) \qquad (6)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются **пучностями стоячей волны** и в соответствии с (6) их координаты определяются

$$x_{\text{пуч}} = \pm n\frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2\ldots \qquad (7)$$

В точках среды, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \text{ или } \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \ (n = 0, 1, 2\ldots) \qquad (8)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются **узлами стоячей волны**. Точки среды, находящиеся в узлах колебаний не совершают. Координаты узлов в соответствии с (8)

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \ (n = 0, 1, 2\ldots). \qquad (9)$$

Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями равно половине длины волны

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}. \qquad (10)$$

В отличие от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии – полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседними узлом и пучностью, не зависит от времени. Происходит превращение кинетической энергии, локализованной вблизи пучности, в потенциальную энергию упруго деформированной среды, локализованную вблизи узла, а затем обратно из потенциальной в кинетическую. Поэтому такие волны получили название стоячих.

4.3. Стоячая волна в закрытой трубе

Если на торце трубы установить мембрану, совершающую гармонические колебания, в трубе возникает плоская бегущая волна. Дойдя до торца трубы часть волны, отразится и пойдет в обратную сторону до противоположного торца, а часть, испытав преломление, будет распространяться в открытое пространство вне трубы. Наложение волн бегущих навстречу друг другу порождает стоячую волну.

Если в качестве колебательной величины S, описывающей волну выбрать плотность ρ, в общем случае получим уравнение стоячей волны

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 2\rho_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.$$

Определение скорости звука в данной работе основано на экспериментальном определении положения узлов, что позволяет рассчитать длину волны по формуле (9), и, зная частоту, вычислить скорость звука (1)

$$\upsilon = \lambda\nu = 2\Delta x\nu. \qquad (11)$$

4.4. Экспериментальная установка

Установка представляет собой прозрачную трубу из оргстекла, с одной стороны которой установлен динамик. С противоположной – заглушка, выполняющая роль отражателя звуковых волн. По всей длине трубы через равные промежутки установлены микрофоны, которые вместе с динамиком выведены на разъем и многожильным кабелем подключаются к блоку управления.

При включении источника звука волны, проходя по трубе, отражаются от заглушки и создают встречные колебания, при этом возникает стоячая волна. На экране ПК в режиме реального времени изображаются графики звуковых колебаний.

4.5. Работа с программой

Запуск программы.

Для установки приложения необходимо запустить файл NTC_22_05_10_step_ru.exe.

После запуска приложения появится окно (рис. 2).

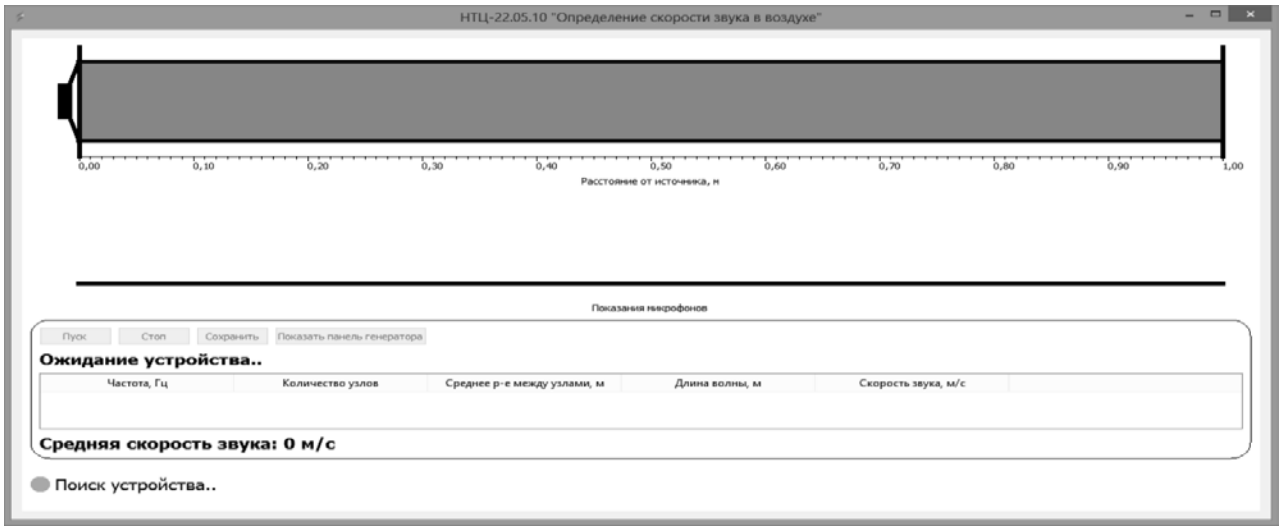

Рис. 2. Общий вид приложения

После того как приложение установит связь с устройством, станут доступны кнопки «Пуск» и «Показать панель генератора». При нажатии кнопки «Пуск» программа начнет автоматический поиск узлов в диапазоне от 200 до 1800 Гц и определять длину волны и скорость звука. После остановки эксперимента (кнопка «Стоп») программа выполнит расчет средней скорости звука.

В верхней части окна программы изображается анимированная модель звуковой волны в трубе и показания микрофонов. Показания микрофонов изображаются в виде отрезков, длина которых пропорциональна соответствующим результатам измерений (рис. 3).

Для визуализации распределения давления в трубе используется цветной градиент. Более насыщенному цвету соответствует области с повышенной плотностью воздуха, менее насыщенному – области с разряженным воздухом.

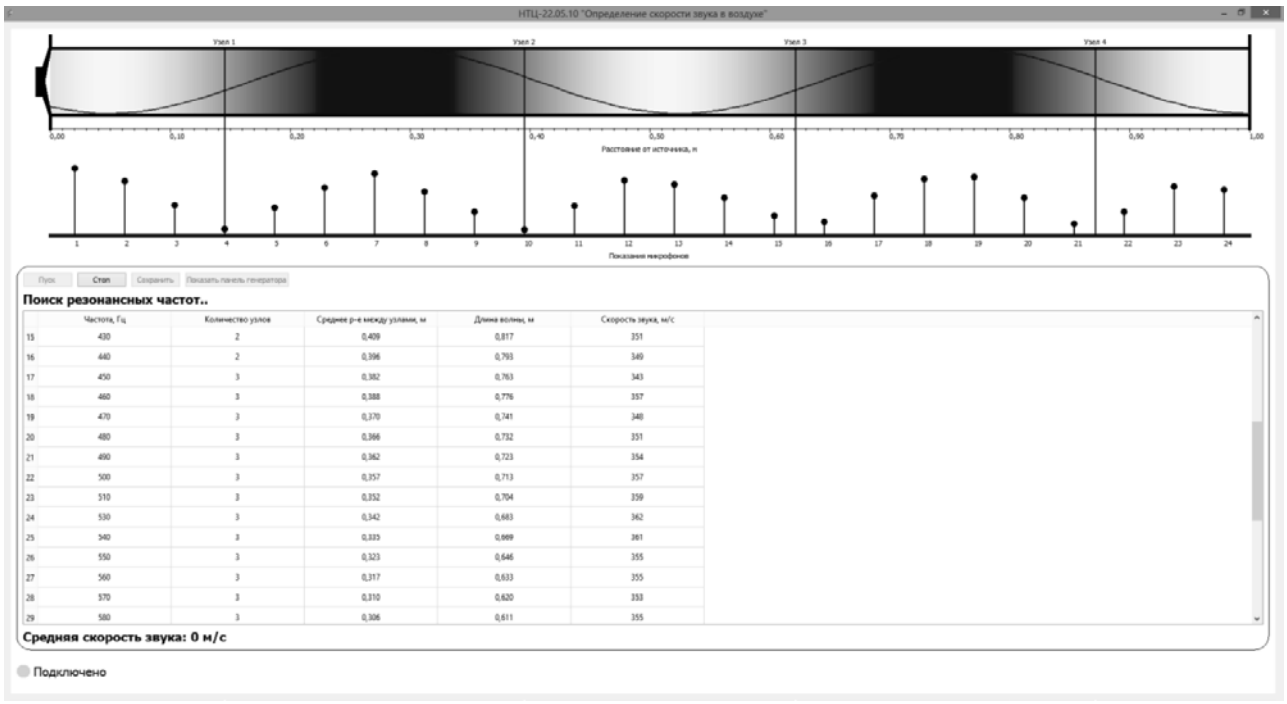

Рис. 3. Автоматическое определение скорости звука

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. К работе с установкой допускаются лица, ознакомленные с ее устройством, принципом действия. Работа выполняется под наблюдением преподавателя.

2. Убедиться, что установка заземлена.

6. ЗАДАНИЕ

Определение скорости звука в воздухе.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

С помощью кнопки «панель генератора» открыть панель управления звукового генератора и вручную задать частоту генерируемой волны от 200 до 1800 Гц с шагом по указанию преподавателя (рис. 4).

Программа автоматически определяет положение узлов на основе показаний микрофонов.

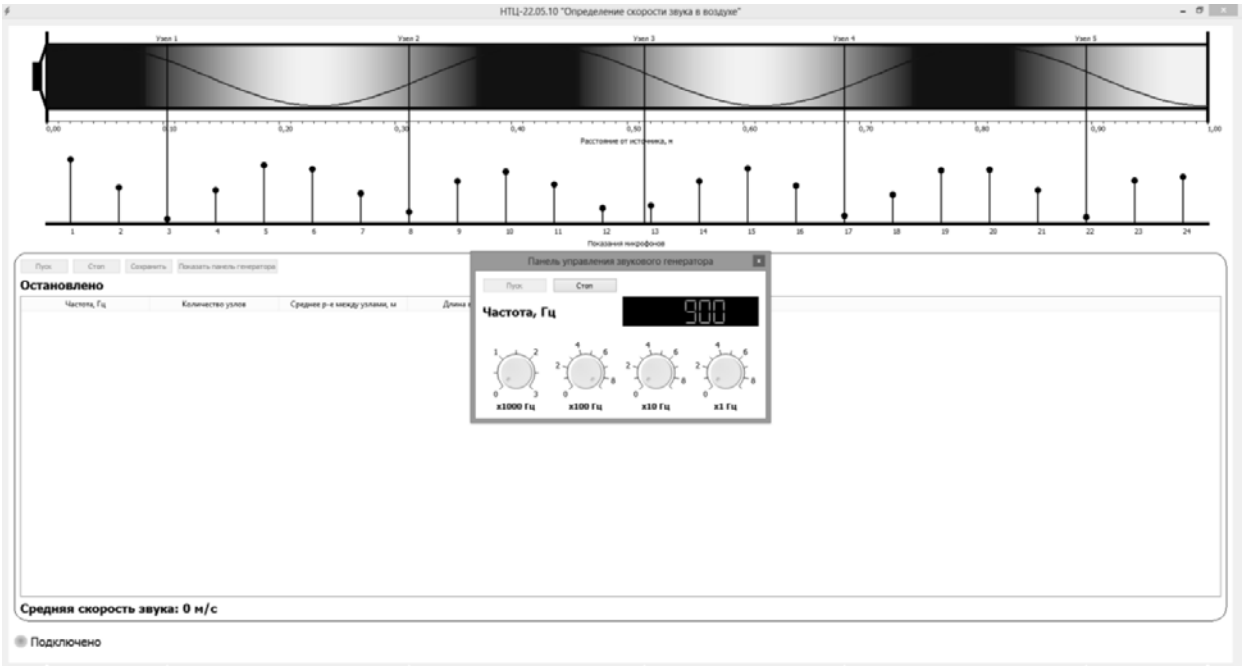

Рис. 4. Панель управления звукового генератора

Для каждой частоты определить по шкале координаты узлов x_i, расстояние между узлами

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

рассчитать среднее расстояние $\langle \Delta x \rangle$, найти длину волны по формуле (10)

$$\lambda = 2 \cdot \langle \Delta x \rangle$$

и определить скорость звука по формуле (1)

$$\upsilon = \lambda \nu .$$

Данные занести в табл. 1

Определить абсолютную и относительную погрешности в определении скорости.

Таблица 1

№ опыта	Частота (Гц), ν	Координаты узлов (м), x_i	Среднее расстояние м/у узлами (м), Δx	Длина волны (м), λ	Скорость звука (м/с), υ	Δυ (м/с)

Сравнить полученное значение скорости звука с теоретическим ее значением. Теоретическое значение скорости звука найти самостоятельно по литературе.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой звук?
2. Какие волны называются поперечными, какие – продольными? Приведите примеры.
3. Как записывается уравнение плоской бегущей волны? Дайте определения основных ее характеристик (амплитуды, периода, частоты, циклической частоты, фазы колебания, волнового числа).
4. Дайте определение волновой поверхности, волнового фронта.
5. Что такое фазовая скорость волны?
6. Что такое стоячая волна? Вывести уравнение стоячей волны. Что такое пучность, узел стоячей волны?
7. Вывести координаты пучностей и узлов стоячей волны.
8. Как определяется скорость звука в данной работе?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет к лабораторной работе должен содержать:

1) название лабораторной работы, цель работы;
2) краткую теорию и основные формулы для выполнения расчетов;
3) перечень приборов и принадлежностей;
4) таблицу с результатами измерений и вычисления;
5) заключение по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия: звуковая, продольная, поперечная и бегущая волна, волновой фронт, волновая поверхность, длина волны, стоячая волна; умеет выводить уравнение стоячей волны и координаты узлов (пучностей);

– правильно выполнил экспериментальную и расчетную части работы;

– составил отчет, соответствующий предъявляемым к нему требованиям;

– сформулировал выводы о проделанной работе;
– подготовил ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2016.

Лабораторная работа № 9
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение свободных незатухающих колебаний математического и физического маятников.

2. ЗАДАЧИ

1. Определение ускорения свободного падения с помощью математического и физического маятников.

2. Приобретение навыков проведения измерений и умения обработки полученных при этом данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Математическим маятником называют систему, состоящую из материальной точки, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, способную совершать колебания в поле силы тяжести.

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг некоторой оси, не проходящей через его центр инерции. В положении равновесия центр инерции маятника (точка *C*) находится с точкой подвеса маятника *O* на одной вертикали (рис. 1).

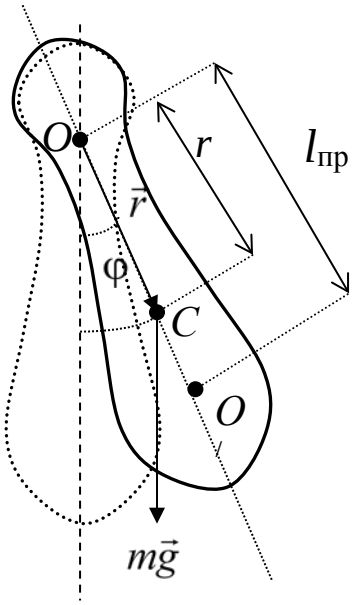

Рис. 1. Физический маятник

При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент силы тяжести $\vec{M}$ относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, равный

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, m\vec{g}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор, проведенный из точки O до точки приложения силы тяжести, т.е. до центра инерции тела (точка C).

Модуль момента силы тяжести равен

$$M = r\, mg \sin\varphi,$$

где r – расстояние от точки подвеса до точки приложения силы тяжести, т.е. до центра инерции тела.

Воспользуемся **уравнением динамики вращательного движения** тела

$$\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение.

Угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Уравнение (1) в проекции на ось Z (рис. 2) можно расписать в виде

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m\,g\,r\sin\varphi. \qquad (2)$$

Знак минус означает, что направление вектора момента силы тяжести противоположно направлению вектора углового ускорения.

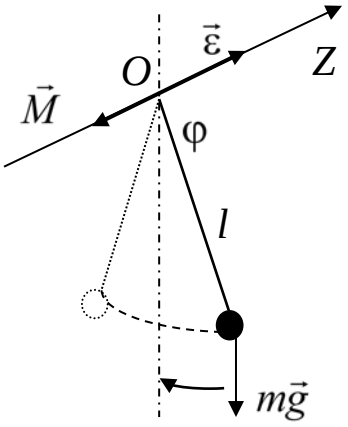

Рис. 2. Математический маятник

Уравнение (2) приведем к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m g r}{J}\sin\varphi = 0. \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{m g r}{J}.$$

При малых углах отклонения $\sin\varphi \approx \varphi$. Придем к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \qquad (4)$$

(Маятник совершает гармонические колебания, если угол отклонения не превышает 5º–8º).

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi = \varphi_{max}\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Величина φ_{max}, равная максимальному углу отклонения маятника от положения равновесия, называется амплитудой гармонических колебаний. Величина α – начальная фаза, ω_0 – циклическая частота колебаний маятника.

Период колебания физического маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m g r}}.$$

Для математического маятника момент инерции равен

$$J = m l^2.$$

В результате выражение для периода колебаний математического маятника будет следующим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (5)$$

Из сопоставления последних двух формул получается, что математический маятник с длиной

$$l_{пр} = \frac{J}{m r}$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Эту величину называют **приведенной длиной** физического маятника.

Точка на прямой, соединяющая точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется **центром качания** физического маятника (точка O' на рис. 1). При переносе точки подвеса в центр качания период колебания маятника будет прежним. Точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания, и период колебаний физического маятника не изменится.

На этом свойстве взаимности основано определение ускорения свободного падения с помощью, так называемого **оборотного маятника**. Он представляет собой маятник (рис. 3), у которого имеются две параллельные друг другу закрепленные вблизи его концов опорные призмы O_1 и O_2, на которых он может поочередно подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем грузы в виде дисков. Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании маятника на любой из призм период колебаний был одинаков.

Рассмотрим произвольный случай, когда опорные призмы находятся в произвольном положении по обеим сторонам от центра тяжести.

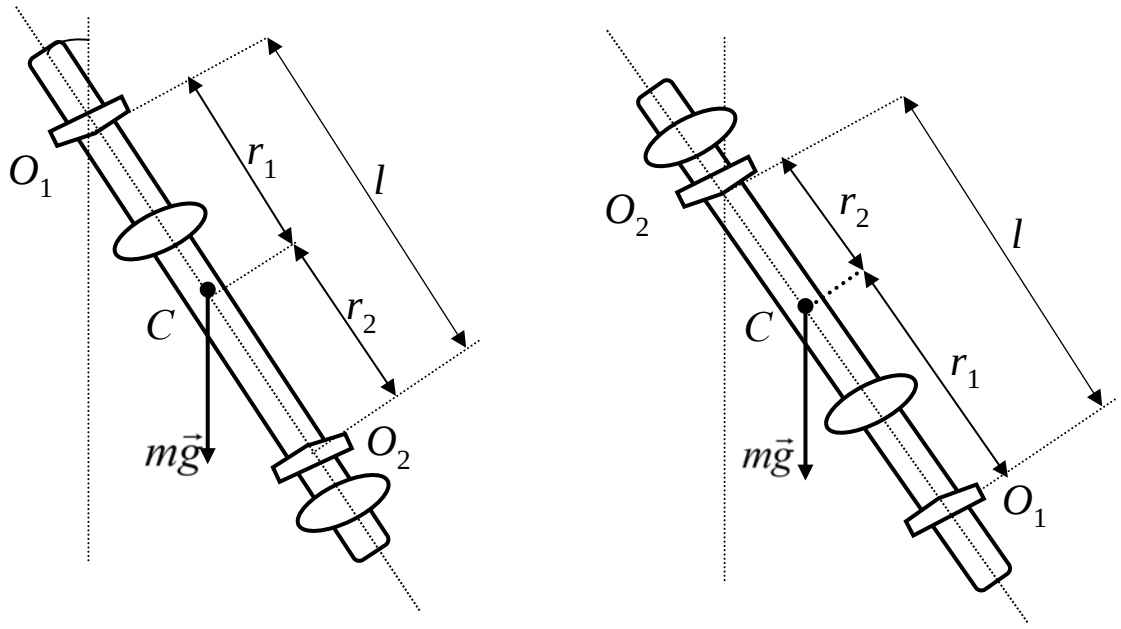

Рис. 3. Оборотный маятник

Рассмотрим произвольный случай, когда опорные призмы находятся в произвольном положении по обеим сторонам от центра тяжести.

Как видно из рис. 3, периоды колебаний маятника по отношению к каждой оси качания будут соответственно равны

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{m\,g\,r_1}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{m\,g\,r_2}}, \tag{6}$$

где J_1, J_2 – моменты инерции оборотного маятника относительно осей качания O_1 и O_2, r_1 и r_2 – расстояние от центра тяжести маятника до соответствующих осей.

По **теореме Штейнера** момент инерции J тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния r между осями.

Используя эту теорему для расчета моментов инерции J_1, J_2 относительно осей качания O_1 и O_2, получим

$$J_1 = J_0 + m r_1^2 \text{ и } J_2 = J_0 + m r_2^2. \tag{7}$$

С учетом (7)

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m r_1^2}{m\,g\,r_1}},\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m r_2^2}{m\,g\,r_2}}. \tag{8}$$

Если $T_1 = T_2 = T$, то, приравнивая подкоренные выражения формул (8), получим

$$\frac{J_0 + m r_1^2}{m\,g\,r_1} = \frac{J_0 + m r_2^2}{m\,g\,r_2},$$

$$J_0 r_2 + m r_1^2 r_2 = J_0 r_1 + m r_2^2 r_1,$$

$$J_0 = \frac{m(r_2^2 r_1 - r_1^2 r_2)}{r_2 - r_1} = \frac{m r_2 r_1 (r_2 - r_1)}{r_2 - r_1},$$

$$J_0 = m \cdot r_1 \cdot r_2. \tag{9}$$

Подставляя J_0 в (8) для T_1 получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m r_1 r_2 + m r_1^2}{m\,g\,r_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_1 + r_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{10}$$

В этом случае если O_1 – точка подвеса, то O_2 – центр качания и наоборот, а l есть приведенная длина данного физического маятника.

Ускорение силы тяжести можно найти, зная период колебаний маятника и приведенную длину. Из (10) следует

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \qquad (11)$$

Если $T_1 \neq T_2$, то из формул (8) для T_1 и T_2, получается

$$T_1^2 g r_1 - T_2^2 g r_2 = 4\pi^2 (r_1^2 - r_2^2).$$

Отсюда

$$g = \frac{4\pi^2 (r_1^2 - r_2^2)}{T_1^2 r_1 - T_2^2 r_2}. \qquad (12)$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Общий вид установки представлен на рис. 4.

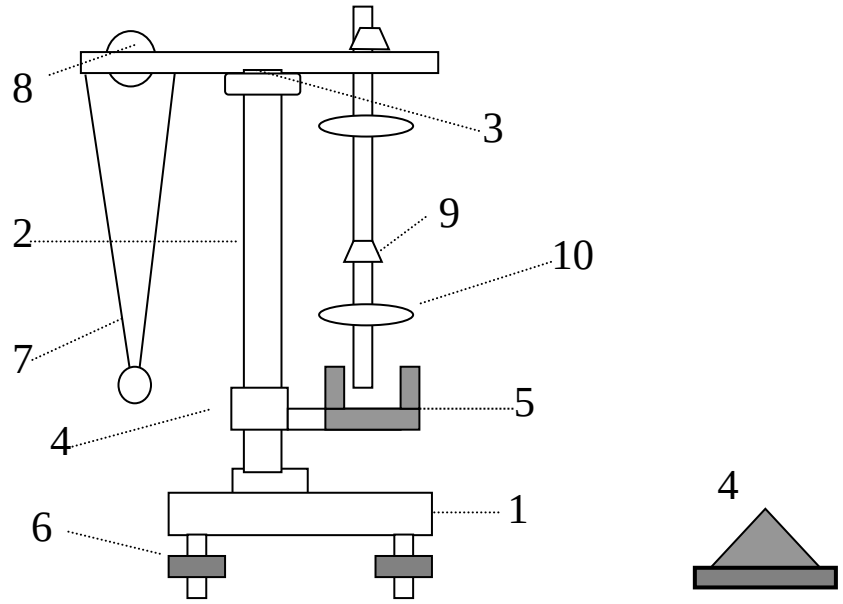

Рис. 4. Экспериментальная установка

Установка включает в себя: основание *1*, вертикальную стойку *2*, математический и физический (оборотный) маятники, имеющие узлы подвеса на верхнем кронштейне *3*. Основание *1* оснащено регулируемыми ножками *6*, которые позволяют произвести выравнивание прибора, и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Вертикальная стойка *2* выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала.

Математический маятник *7* состоит из нити, на которой подвешен груз в виде металлического шарика, и устройство *8* для изменения длины подвеса маятника. Оборотный маятник состоит из жесткого металлического стержня с рисками через каждые 10 мм для

отсчета длины, две призматические опоры *9*, два диска 10 с возможностью перемещения и фиксации по всей длине стержня. Узлы подвески математического и физического маятников расположены на диаметрально противоположных относительно вертикальной стойки *2* сторонах кронштейна *3*.

Для определения расстояний r_1 и r_2 физический маятник снимают с кронштейна и располагают на специальной подставке, имеющей острую грань *4*. Перемещая маятник нетрудно найти положение центра масс. Расстояние от него до опорных призм и есть искомые r_1 и r_2.

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и описанием лабораторной установки.
2. По окончании работы выключите установку, приведите в порядок свое рабочее место

6. ЗАДАНИЯ

1. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.
2. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника

1. По шкале вертикальной стойки определить длину математического маятника.
2. Привести маятник в движение, отклонив его приблизительно на 5º–8º от положения равновесия. С помощью секундомера измерить время 10–20 полных колебаний. Опыт повторить 5 раз.
3. Рассчитать среднее значение времени, его абсолютную и относительную погрешность. Определить среднее значение периода колебаний математического маятника $T_{\text{ср}} = \dfrac{t_{\text{ср}}}{n}$.
4. Данные занести в табл. 1.
5. Определить ускорение свободного падения исходя из формулы

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\text{ср}}}{T_{\text{ср}}{}^2}.$$

5. Рассчитать абсолютную и относительную погрешность измерения ускорения свободного падения.

6. Окончательный результат записать в виде

$$g = \left(g_{\text{ср}} \pm \Delta g \right) \text{ м} / \text{с}^2.$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} 100\%.$$

7. Сравнить полученное значение g с теоретическим значением ускорения свободного падения для данной широты местности.

Таблица 1

№	n	t, с	Δt, с	T, с	l, м	g, м/с^2
1 2 3 4 5						
среднее значение						

Задание 2. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

1. Зафиксировать диски на стержне несимметрично таким образом, чтобы один из них находился вблизи конца стержня, а другой – между опорными призмами вблизи его середины.

2. Призматические опоры маятника закрепить по обеим сторонам центра тяжести полученной системы таким образом, чтобы они были обращены друг к другу лезвиями. Один из них поместить вблизи свободного конца стержня, а второй – на половине расстояния между дисками.

3. Проверить, соответствуют ли грани лезвий опор нарезкам на стержне.

4. Подвесить оборотный маятник на призматической опоре, находящейся вблизи конца стержня. Повернуть верхний кронштейн так, чтобы стержень маятника находился в рабочей зоне фотодатчика.

5. Привести маятник в движение, отклонив его на 5º–8º от положения равновесия. Не рекомендуется выбирать начальную амплитуду более 10º, так как при этом может возникнуть скольжение призмы по опорной площадке.

6. С помощью секундомера измерить время 10–20 колебаний.

7. Определить период колебаний T_1 оборотного маятника.

8. Снять маятник и закрепить его на второй призматической опоре.

9. Определить период T_2 колебаний оборотного маятника в этом положении, повторив действия п. 5, 6.

10. Если $T_2 > T_1$, то опору переместить в направлении диска, находящегося в конце стержня. Если же $T_2 < T_1$, то в направлении середины стержня. Расположение диска и первой опоры не менять.

11. Повторно измерить период T_2 и сравнить с величиной T_1.

12. Изменять положение второй опорной призмы до тех пор, пока T_2 не станет равным T_1 с точностью до 1%. В этом положении опыт повторить 5 раз. Рассчитать среднее значение времени, его абсолютную и относительную погрешность. Данные занести в табл. 2.

Таблица 2

№	n	t_1, с	Δt_1, с	T_1, с	t_2, с	Δt_2, с	T_2, с	g, м/с^2
1 2 3 4 5								
среднее значение								

13. Определить приведенную длину оборотного маятника, подсчитав количество нарезок на стержне между опорами, которые нанесены через каждые 10 мм.

14. Рассчитать ускорение свободного падения, используя формулу

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\text{ср}}}{T_{\text{ср}}^{\ 2}}.$$

15. Если не удалось добиться равенства T_1 и T_2, то ускорение свободного падения рассчитать, используя формулу

$$g = \frac{4\pi^2(r_1^2 - r_2^2)}{T_{1\text{ср}}^2 r_1 - T_{2\text{ср}}^2 r_2}.$$

Центр масс маятника найти с помощью призмы и линейкой измерить расстояния r_1 и r_2 от центра масс до точек подвеса.

16. Рассчитать абсолютную и относительную погрешность измерения ускорения свободного падения. Сделать запись конечного результата.

17. Данные занести в табл. 2.

18. Окончательный результат записать в виде

$$g = \left(g_{\text{ср}} \pm \Delta g\right) \text{ м} / \text{с}^2$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} 100\%.$$

19. Сравнить полученное значение g с теоретическим значением ускорения свободного падения для данной широты местности.

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим маятником?
2. Что называется физическим маятником?
3. Что называется приведенной длиной физического маятника?
4. Как формулируется теорема Штейнера?
5. Что называется «центром качания»?
6. Какой маятник называется оборотным?
7. Выведите формулы для периодов колебаний математического и физического маятников.
8. Как направлены вектор момента силы тяжести $\vec{M}$ и вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, когда маятник движется к положению равновесия? От положения равновесия?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет к лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Теоретические основы метода определения ускорения свободного падения с помощью математического и физического маятников.

3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.

4. Расчеты погрешностей измерения ускорения свободного падения.

5. Вывод по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия математического и физического маятников, приведенной длины и центра качания физического маятников, умеет выводить формулы для определения периодов колебаний маятников и применять их при решении типовых задач;

– овладел знанием теоретических основ экспериментального определения ускорения свободного падения с помощью математического и физического маятников;

– решает типовые задачи на математический и физический маятники;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2016.

2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.

3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2016.

Лабораторная работа № 10
ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

1. ЦЕЛИ РАБОТЫ

1. Изучение свободных колебаний пружинного маятника.

2. Экспериментальное определение коэффициента жесткости пружины, логарифмического декремента затухания и коэффициента сопротивления воздуха.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Механические колебания и волны».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных данных и оценки погрешностей измерений.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Свободными (собственными) называют колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того как она была выведена из положения равновесия. Если в системе отсутствуют диссипативные силы (силы сопротивления среды, силы трения), то при колебаниях не происходит потерь энергии. Такие свободные колебания называют **незатухающими**, они происходят с неизменной амплитудой (амплитудой колебания называют наибольшее отклонение колеблющейся величины от равновесного значения).

Колебания, при которых значение некоторой физической величины (например, координаты тела, его скорости, ускорения) повторяется через равные промежутки времени, называют **периодическими**. Наименьший промежуток времени, через который это происходит, называют **периодом колебания**.

Колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону косинуса или синуса, называют **гармоническими**. Если величина x совершает гармоническое колебание, то она изменяется со временем по закону

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где A – амплитуда колебания; ω_0 – круговая или циклическая частота; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебания, определяющая значение x

в данный момент времени t; φ_0 – фаза колебания в начальный момент времени $t = 0$, называемая начальной фазой.

Если x представляет собой координату тела, то скорость υ и ускорение a при гармоническом колебании изменяются со временем по законам:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{2}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{3}$$

Из уравнений (3) и (1) получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называют **дифференциальным уравнением свободных незатухающих гармонический колебаний**. Решением этого уравнения является гармоническая функция (1).

Примером гармонических колебаний служат колебания **пружинного маятника**, представляющего собой груз, прикрепленный к упругой пружине. Если l_0 – первоначальная длина пружины без груза, то при подвешивании груза массы m пружина растянется на величину Δl, называемую **статическим удлинением пружины** (рис. 1).

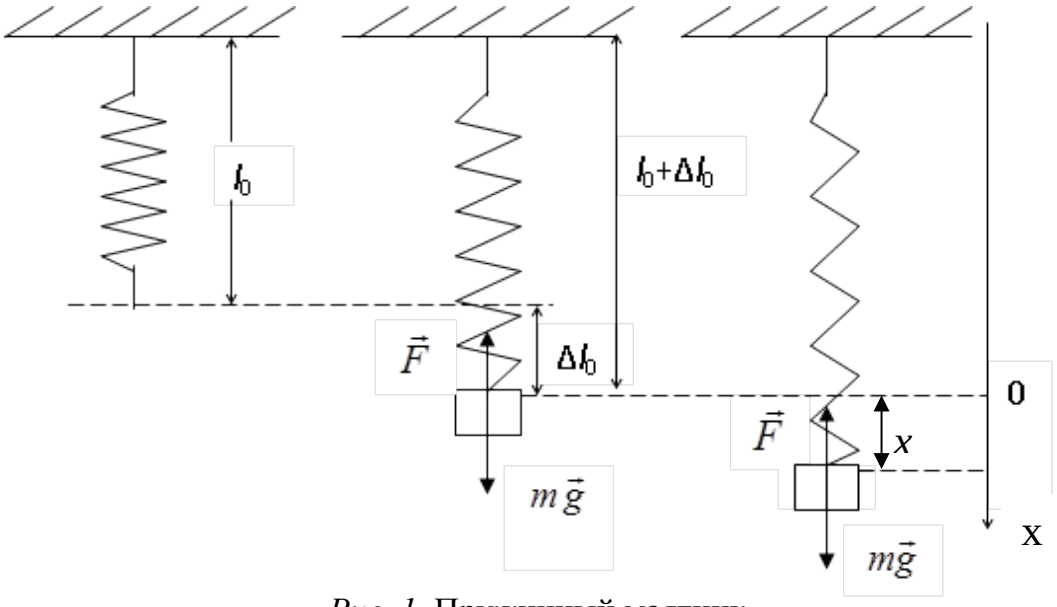

Рис. 1. Пружинный маятник

Когда маятник находится в положении равновесия, сила тяжести, действующая на груз, уравновешивается силой упругости пружины. Если удлинение пружины невелико, то выполняется **закон Гука**

$$F_1 = k\,\Delta l.$$

Согласно второму закону Ньютона, можно

$$m\,g = k\,\Delta l\,, \qquad (5)$$

где k – коэффициент упругости.

При смещении груза относительно положения равновесия в положение, где его координата равна x, удлинение пружины будет равно $\Delta l + x$. Для этого положения по второму закону Ньютона

$$m\,a = mg - k\,(\Delta l + x)\,.$$

Отсюда, учитывая (5) и то, что $a = \dfrac{d^{\,2}x}{d\,t^{\,2}}$, получаем

$$\frac{d^2x}{d\,t^2} + \frac{k}{m}x = 0\,. \qquad (6)$$

Уравнение (6) – это дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний совершаемых с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Решением уравнения (6) является функция вида (1) $x = A\cos(\omega_0\,t + \varphi_0)\,.$

Таким образом, колебания, совершаемые телом под действием упругой силы или любой другой, не являющейся силой упругости, но также пропорциональной смещению ($F \sim x$), будут гармоническими. Такие силы называют **квазиупругими.**

В реальных колебательных системах всегда присутствуют силы сопротивления среды, направленные противоположно скорости движения тела, например, силы трения. Их наличие приводит к рассеянию энергии, запасенной в системе и, как следствие, к уменьшению амплитуды колебаний. Такие колебания называют **затухающими**. Они не являются периодическими и гармоническими, поэтому при описании затухающих колебаний понятия амплитуды, периода, частоты можно использовать лишь условно.

Закон убывания амплитуды зависит от характера сил сопротивления среды, действующих на тело. При малых его

скоростях с достаточной степенью точности можно считать, что сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{\upsilon},$$

где r – **коэффициент сопротивления среды**.

Уравнение динамики тела при его движении под действием сил упругости и сопротивления среды в проекции на ось OX (рис. 1) будет имеет вид

$$ma = -kx - r\upsilon. \qquad (7)$$

Откуда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (8)$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$ называют **коэффициентом затухания**.

Уравнение (8) называют **дифференциальным уравнением свободных затухающих колебаний**. Решением уравнения (8) является функция $x(t)$ вида

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (9)$$

где A_0 и φ_0 – начальные амплитуда и фаза колебаний, определяемые начальными условиями.

На рис. 2 приведен типичный график функции (9).

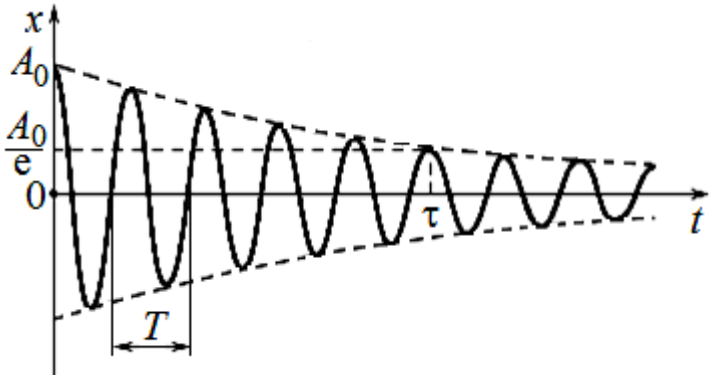

Рис. 2. Затухающие колебания

Изменение x со временем, судя по уравнению (9), можно рассматривать как гармоническое колебание с изменяющейся со временем амплитудой

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (10)$$

Циклическая частота затухающих колебаний оказывается равной

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,.$$

Величину $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ называют **периодом затухающих колебаний.**

Основными величинами, характеризующими затухающие колебания в системе, служат логарифмический декремент затухания, время релаксации и добротность.

Логарифмическим декрементом затухания λ называют натуральный логарифм отношения двух амплитуд, взятых через период T,

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta t} = \beta T\,.$$

Время τ, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз (e – экспонента), называют **временем релаксации**. Можно показать, что

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

Величину

$$Q = \pi N_e. \qquad (11)$$

где N_e – число колебаний за время релаксации, называют **добротностью колебательной системы**.

Добротность равна умноженному на 2π отношению энергии E колебаний системы в произвольный момент времени к энергии ΔE, теряемой за период

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

При малых значениях β

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Колебания, которые происходят под действием внешней, периодически изменяющейся со временем силы $F = f(t)$, называют **вынужденными**. Если вынуждающая внешняя сила изменяется по гармоническому закону $F = F_0 \cos \omega_{\text{вын}}\, t$ (где $\omega_{\text{вын}}$ – частота

вынуждающей силы) то уравнение динамики тела в любой момент времени можно представить в виде

$$ma = -kx - r\upsilon + F_0 \cos\,\omega_{\text{вын}}\, t, \qquad (12)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_{\text{вын}}\, t. \qquad (13)$$

Это уравнение называют **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний**. Общее решение неоднородного уравнения (13) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos\,(\omega t + \varphi_0), \qquad (14)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x = A\cos(\omega_{\text{вын}}\, t - \varphi), \qquad (15)$$

где значения A и φ определяются уравнениями

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2_{\text{вын}})^2 + 4\beta^2\omega^2_{\text{вын}}}},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega_{\text{вын}}}{\omega_0^2 - \omega^2_{\text{вын}}} \qquad (16)$$

Зависимость $x(t)$ при вынужденных колебаниях показана на рис. 3.

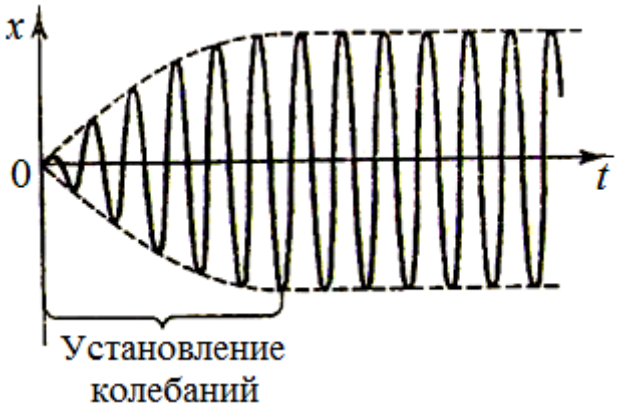

Рис. 3. Вынужденные колебания

Слагаемое (14) играет существенную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С течением времени из-за множителя $e^{-\beta t}$ роль слагаемого (14)

уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь слагаемое (15). Таким образом, вынужденные установившиеся колебания представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных установившихся колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и зависит от ее частоты.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (рис. 4) такова, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения.

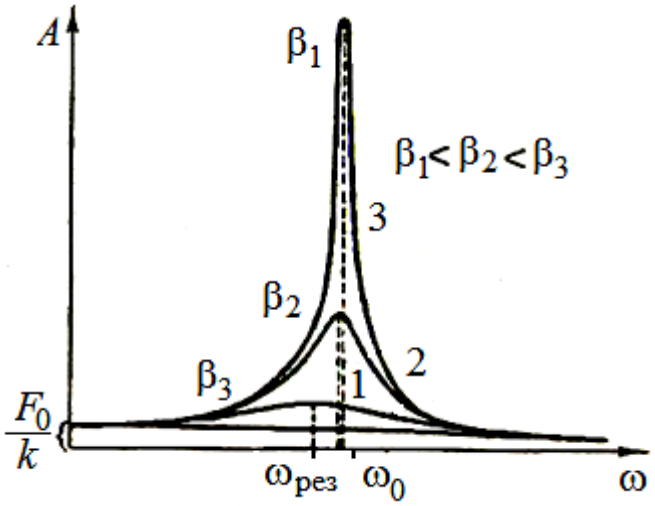

Рис. 4. Резонансные кривые

Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Такое явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы ω к частоте собственных колебаний системы ω_0 называют резонансом, а соответствующую частоту – резонансной частотой.

Резонансная частота для *x* оказывается равной

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,, \tag{17}$$

а амплитуда при резонансе

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_o / m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{18}$$

Согласно (17), резонансная частота в отсутствие сопротивления среды (при $\beta = 0$) совпадает с собственной частотой колебательной системы.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Работа выполняется на установке, показанной на рис. 5. Установка представляет собой стойку, состоящую из основания *1* и несущей штанги *2*, на которой крепятся верхний кронштейн *3* и нижний кронштейн *4* со шкалой *5*. К верхнему кронштейну *3* подвешена колебательная система (пружинный маятник), состоящая из пружины *6* и груза *7*. В комплект прибора входит набор цилиндров № 1, № 2, № 3 и дисков № 1, № 2, № 3.

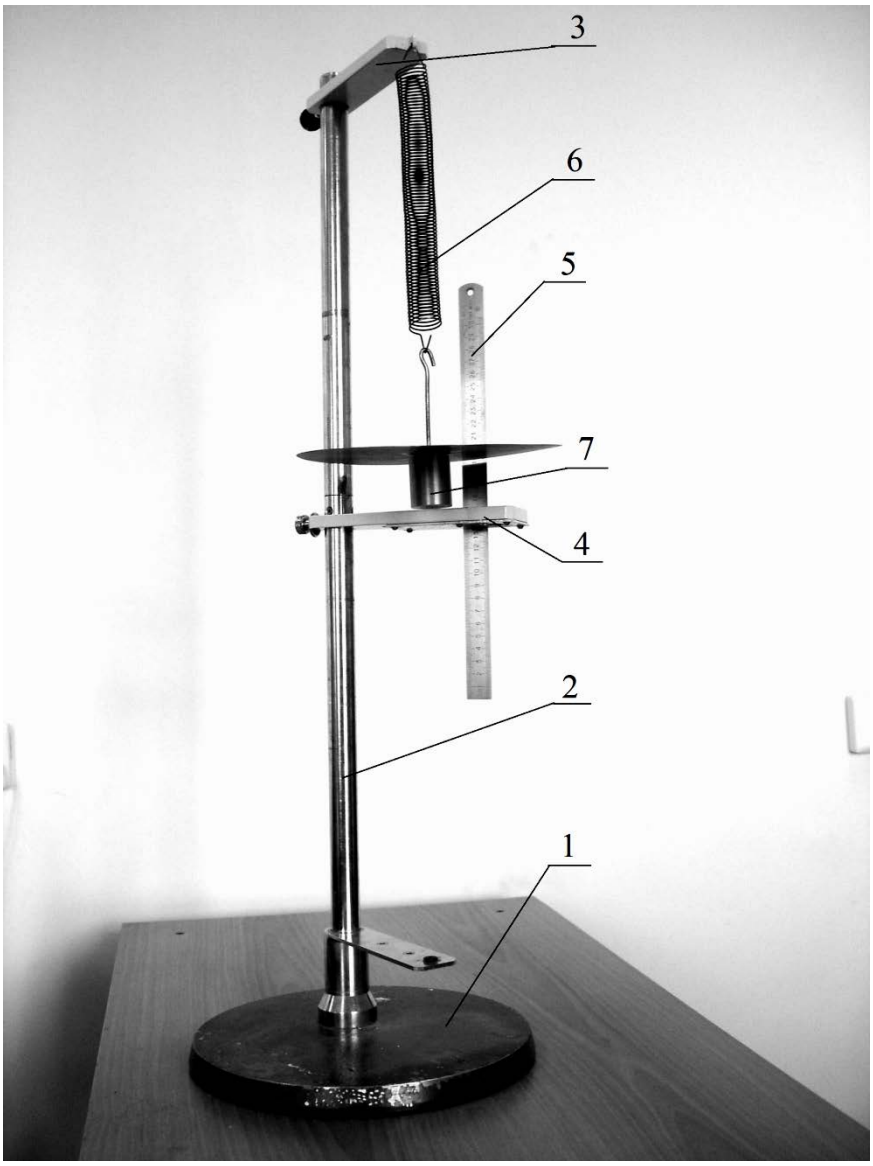

Рис. 5. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданиями и лабораторной установкой.
2. По окончании работы приведите в порядок рабочее место.

6. ЗАДАНИЯ

1. Изучение свободных незатухающих колебаний пружинного маятника. Определение коэффициента жесткости пружины.
2. Изучение затухающих колебаний пружинного маятника. Определение логарифмического декремента затухания и коэффициента сопротивления воздуха.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Изучение свободных незатухающих колебаний пружинного маятника. Определение коэффициента жесткости пружины

1. Определить положение нижнего конца пружины l_0 по шкале 5.
2. Прикрепить к нижнему концу пружины цилиндр № 1 и определить новое положение нижнего конца пружины l.
3. Вычислить величину статистического удлинения $\Delta l = l - l_0$.
4. Вычислить коэффициент жесткости пружины по формуле

$$k' = \frac{P}{\Delta l} = \frac{m g}{\Delta l},$$

где m – масса цилиндра.

5. Вывести пружинный маятник из положения равновесия на 20 мм и измерить время 20 колебаний.
6. Измерения по п. 5 повторить еще 2 раза и результаты записать в табл. 1.
7. Определить среднее время 20 колебаний и рассчитать средний период колебаний по формуле

$$T = \frac{t}{n},$$

где n – число колебаний.

8. Зная период колебаний и массу цилиндра, вычислить коэффициент жесткости пружины по формуле

$$k'' = \frac{4\pi^2 m}{T^2}.$$

9. Пункты 2–8 повторить для цилиндров № 2 и № 3.

10. Для одного из цилиндров определить погрешности измерений коэффициентов k' и k''.

11. Сравнить значения коэффициентов жесткости пружины, полученные обоими методами.

Таблица 1

m, кг	l_0, м	l, м	Δl, м	k', кг/с^2	$\Delta k'$, кг/с^2	n	t, с	$t_{ср}$, с	T, с	k'', кг/с^2	$\Delta k''$, кг/с^2

Задание 2. Изучение затухающих колебаний пружинного маятника. Определение логарифмического декремента затухания и коэффициента сопротивления воздуха

1. Подвесить к пружине цилиндр № 1 и диск № 1.

2. Вывести маятник из положения равновесия на 20 мм и определить время 20 колебаний.

3. Повторить измерения еще 2 раза, результаты записать в табл. 2.

Таблица 2

m, кг	t,с	$t_{ср}$, с	n	T, с	A_0, м	A, м	t', с	β, с$^{-1}$	λ	r, кг·с$^{-1}$	$\Delta\beta$, с$^{-1}$	$\Delta\lambda$	Δr кг·с$^{-1}$

4. Определить среднее время 20 колебаний и по среднему времени рассчитать период.

5. Измерить начальную амплитуду A_0. Через время $t' \approx 60$ с определить верхнее и нижнее отклонение нижнего конца пружины из положения равновесия, используя шкалу 5. Амплитуду колебаний рассчитать по формуле

$$A = \frac{|l_2 - l_1|}{2},$$

где l_1 – верхний отсчет по шкале; l_2 – нижний отсчет по шкале.

Вычислить коэффициент затухания β по формуле

$$\beta = \frac{1}{t'} \ln \frac{A_0}{A}.$$

6. Рассчитать логарифмический декремент затухания λ и коэффициент сопротивления среды r по формулам

$$\lambda = \beta T,$$

$$r = \frac{2m\lambda}{T},$$

где m – масса цилиндра с диском.

7. Пункты 1–7 повторить, используя груз № 1 и диски № 2, № 3.

8. Для одного из дисков определить погрешности измерений β, λ, r.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют свободными незатухающими, свободными затухающими, вынужденными?
2. Как записываются дифференциальные уравнения этих колебаний?
3. Какие колебания называют гармоническими?
4. Что такое коэффициент жесткости?
5. Какие силы называют квазиупругими?
6. Что называют логарифмическим декрементом затухания, временем релаксации, добротностью?
7. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний?
8. Как рассчитать частоты свободных колебаний (незатухающих и затухающих) через параметры колебательной системы?
9. Какое явление называют резонансом?
10. Как рассчитать резонансную частоту?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать.

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Краткую теорию. Основные формулы для выполнения расчетов.
3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.

4. Расчет погрешностей измерений коэффициента жесткости пружины, коэффициента сопротивления среды, коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания.

5. Вывод по результатам работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы:

– имеет представления о свободных незатухающих и затухающих колебаниях, вынужденных колебаниях, умеет выводить дифференциальные уравнения этих колебаний и записывать их решения; овладел понятиями квазиупругая сила, резонанс; знает определения логарифмического декремента затухания, времени релаксации, добротности;

– правильно выполнил экспериментальную и расчетную части работы;

– правильно оценил погрешности определения коэффициента жесткости пружины, коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания и коэффициента сопротивления среды;

– составил отчет, соответствующий предъявляемым к нему требованиям;

– сформулировал выводы о проделанной работе;

– подготовил ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2016.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2016.

Лабораторная работа № 11
ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение стоячих волн в струне и нахождение собственных частот колебаний струны.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по темам: интерференция волн, стоячие волны и условия их образования.
2. Экспериментальное нахождение собственных частот колебаний струны.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Стоячие волны

Если в среде распространяются одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это вытекающее из опыта утверждение называется **принципом суперпозиции (наложения) волн**. Практический интерес представляет случай наложения двух (или нескольких) волн с одинаковыми частотами, имеющими постоянную разность фаз во времени. Такие волны и создающие их источники называются **когерентными**. Сложение когерентных волн называется **интерференцией**. В результате интерференции когерентных волн происходит устойчивое во времени усиление амплитуды в одних точках пространства и ослабление амплитуды в других в зависимости от разности фаз волн в данной точке.

Частным случаем явления интерференции волн являются стоячие волны. **Стоячая волна** образуется в результате интерференции двух гармонических волн, обладающих одинаковыми амплитудами, частотами и распространяющихся во взаимно противоположных направлениях навстречу друг другу. Обе эти волны в отличие от стоячей волны называются **бегущими** волнами.

Чаще всего стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волн образуют стоячую волну.

Запишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях с нулевой начальной фазой

$$S_1 = A\cos(\omega t - k x), \qquad (1)$$
$$S_2 = A\cos(\omega t + k x),$$

где A – амплитуда колебаний; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число (λ – длина волны); ω – циклическая частота.

Сложив эти уравнения, получим уравнение стоячей волны

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos(k x)\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

или

$$S = (2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t\,. \qquad (2)$$

Из полученного уравнения следует, что в каждой точке пространства происходят колебания той же частоты ω с амплитудой $\left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$, зависящей от координаты x данной точки.

В точках среды, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \text{ или } \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi \ (n = 0, 1, 2\ldots) \qquad (*)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются **пучностями стоячей волны** в соответствии с (*) их координаты определяются

$$x_{\text{пуч}} = \pm n\frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

В точках среды, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \text{ или } \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (**)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются **узлами стоячей волны**, т.е. колебаний не совершают. Координаты узлов определяются уравнением в соответствии с (**)

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

На рис. 1 дан ряд «моментальных фотографий» смещений S точек среды от положения равновесия с интервалом времени в четверть периода (положения двух точек т. *а* – пучность и т. *в* – узел).

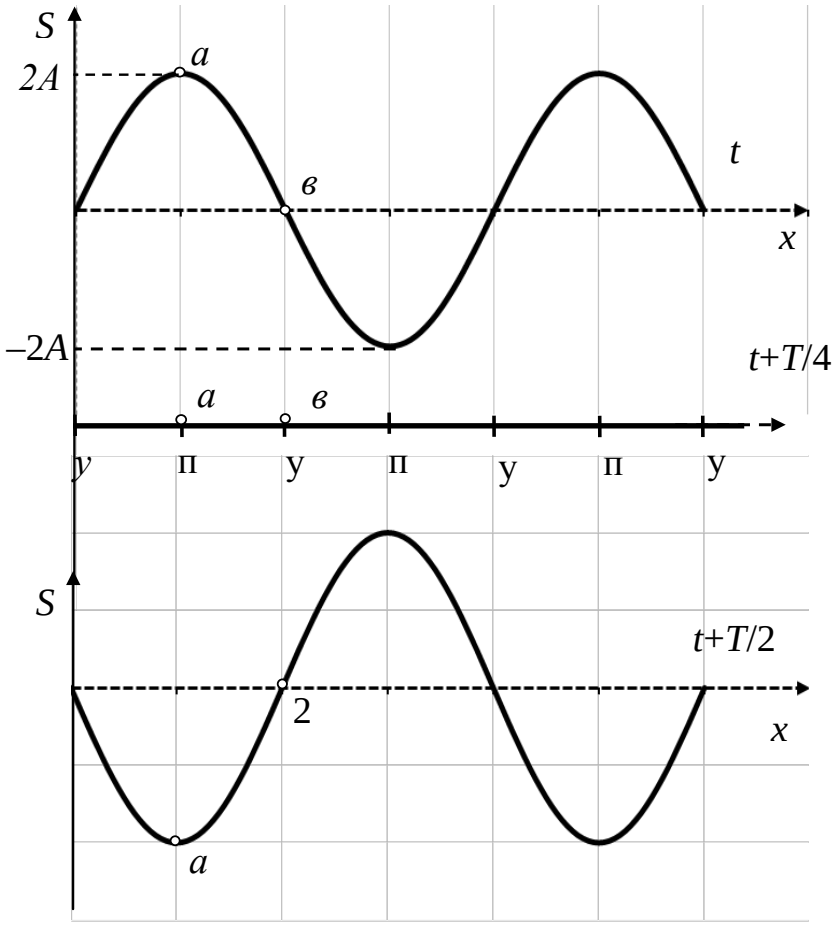

Рис. 1. Смещение точек среды от положения равновесия в разные моменты времени

В отличие от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии – полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседним узлом и пучностью, не зависит от времени. Происходит превращение кинетической энергии, локализованной вблизи пучности, в потенциальную энергию упруго деформированной среды, локализованную вблизи узла, а затем обратно из потенциальной в кинетическую. Поэтому такие волны получили название стоячих. Отсутствие переноса энергии стоячей волной является результатом того, что образующие ее

падающая и отраженная волны переносят равную по величине энергию, но в противоположных направлениях.

3.2. Колебания струны

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны. Так как концы струны закреплены, то эти точки крепления будут узлами в соответствии с (4) в случае возникновения стоячих волн. Стоячие волны будут образовываться, если на длине струны будет укладываться целое число полуволн (рис. 2) т.е. что стоячие волны образуются при условии $l = n\frac{\lambda}{2}$ или

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \text{ где } (n = 1, 2, 3, 4, ...) \qquad (5)$$

где l – длина струны.

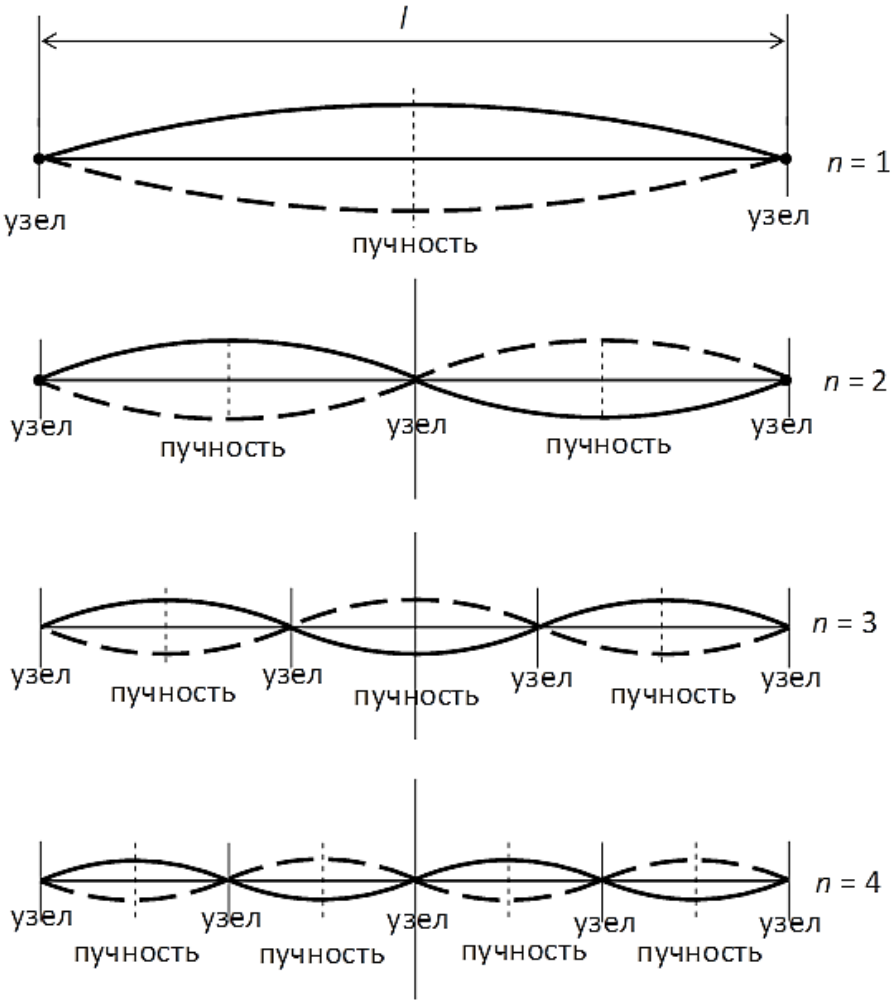

Рис. 2. Образование стоячей волны в натянутой струне

Длинам волн λ, полученным для разных n, соответствуют частоты:

$$\nu_n = \frac{\upsilon_\phi}{\lambda} = \frac{\upsilon_\phi}{2l} n, \ (n = 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

где υ_ϕ – фазовая скорость распространения бегущих поперечных волн вдоль струны. Она определяется силой натяжения (F) струны и массой единицы длины (линейной плотностью ρ)

$$\upsilon_\phi = \sqrt{\frac{F}{\rho}}, \qquad (6)$$

и в этом случае

$$\nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho}} = n \cdot \nu_1. \qquad (7)$$

Частоты ν_n – называются собственными частотами струны или гармониками. Собственные частоты являются кратными частоте при n = 1, $\nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho_{лин}}}$, которая называется *основной частотой* данной струны.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Принцип действия установки основан на возникновении сил, действующих на натянутую струну с током, помещенную в постоянное магнитном поле. При определенных частотах генератора и силе натяжения в струне образуется стоячая волна. Установка выполнена в настольном исполнении и состоит из объекта исследования и измерительного блока (рис. 3).

Блок со струной состоит из жестокого основания, на котором закреплены постоянные магниты, между полюсами которых натянута струна, и механизма натяжения струны. Один конец струны жестко крепится к основанию, а второй прикреплен к тарировочной пружине. Второй конец пружины механически связан с винтовым механизмом, при помощи которого осуществляется изменение натяжения струны.

Измерение длины стоячих волн, образующихся в струне, производятся по миллиметровой шкале, нанесенной на прозрачный

кожух, закрывающий переднюю стенку объекта исследования. Для улучшения видимости струны за ней размещена лампа подсветки.

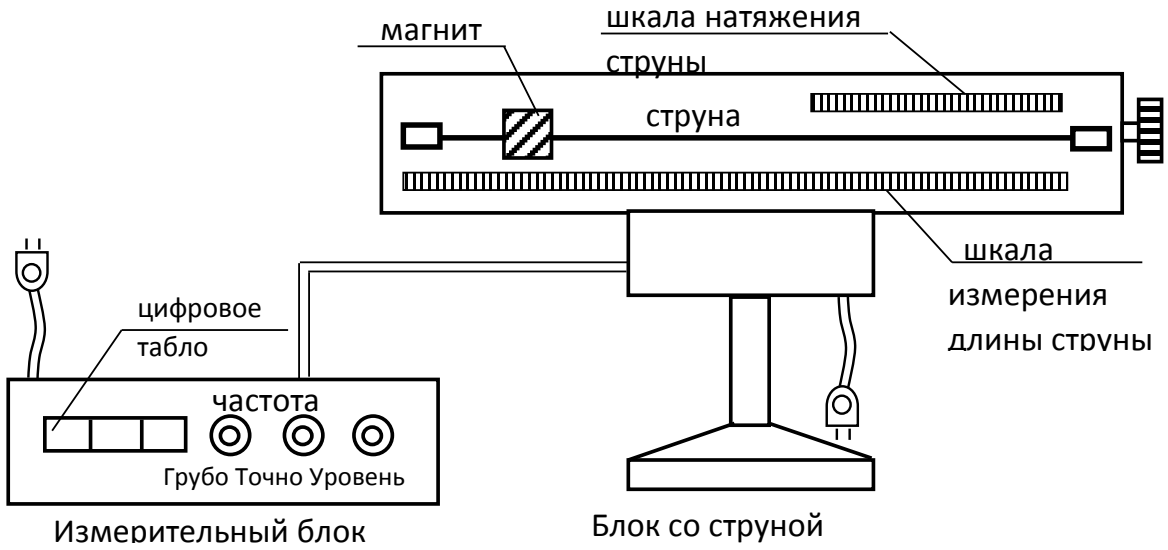

Рис. 3. Экспериментальная установка

В состав измерительного блока входят генератор гармонических колебаний с усилителем мощности для возбуждения колебаний струны и частотомер для измерения частоты сигнала, выдаваемого генератором. На передней панели размещены следующие элементы управления:

– цифровое табло частотомера;

– ручка ЧАСТОТА «ГРУБО» и ЧАСТОТА «ТОЧНО» для установки частоты генератора;

– ручка «УРОВЕНЬ» – для установки необходимой амплитуды выходного напряжения генератора (амплитуда колебаний струны).

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. К работе с установкой допускаются лица, ознакомленные с ее устройством, принципом действия. Работа выполняется под наблюдением преподавателя.

2. Убедиться, что установка заземлена.

3. Перед включением установки в сеть сетевой выключатель измерительного устройства должен находиться в положении «Выкл», ручки регулировки должны быть выведены в крайнее левое положение.

Примечание: Запрещается задавать натяжение струны более 0,6 Н.

6. ЗАДАНИЯ

1. Теоретическое определение собственных частот струны.
2. Экспериментальное нахождение собственных частот струны.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

7.1. Теоретическое определение собственных частот струны

1. По шкале на передней панели определите длину струны *l*.
2. По формуле (6) найти фазовую скорость υ_{ϕ}.
3. Рассчитать по формуле (7) собственные частоты струны для $n = 1, 2, 3, 4$. Значение силы натяжения струны $F = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ или 0,4 Н задается по указанию преподавателя. Вычислите абсолютные и относительные погрешности в определении собственных частот струны. Данные занесите в табл. 1

7.2. Экспериментальное нахождение собственных частот струны

1. Подключите установку к сети 220 В, нажмите кнопку «Сеть» устройства питания лампы. Загорится подсветка струны. Нажмите кнопку «Сеть» измерительного блока. Загорится цифровое табло.
2. Дайте установке прогреться в течение 3–5 минут.
3. Установите выбранное значение силы натяжения струны. Ручку «УРОВЕНЬ» установите в среднее положение.
4. Изменяя при помощи ручек «ГРУБО» и «ТОЧНО» частоту в диапазоне 20–45 Гц, получите хорошо различимую основную частоту струны ($n = 1$).
5. Увеличивая частоту, получите различные собственные частоты ($n = 2, 3, 4, \ldots$). Оцените погрешность в определении собственных частот, найденных экспериментально.
6. Результаты измерений внесите в таблицу.
7. Сделайте заключение по работе.

Таблица 1

№ п/п	$l_{стр}$, м	ρ, кг/м	F, Н	υ_ϕ м/с	ν_n, Гц	$\nu_{n=1}$, Гц	$\nu_{n=2}$, Гц	$\nu_{n=3}$, Гц	$\nu_{n=4}$, Гц
1	0,62	0,000127			Теоретич. частоты				
2					Эксперим. частоты				

Контрольные вопросы

1. Как записывается уравнение бегущей волны? Дайте определения основным ее характеристика: амплитуда, период, линейная частота, циклическая частота, фаза колебания.
2. В чем заключается принцип суперпозиции волн?
3. Какие условия необходимы для возникновения интерференции волн?
4. Какие источники колебаний называются когерентными?
5. Что такое стоячая волна? Вывести уравнение стоячей волны. Что есть пучность, узел стоячей волны?
6. Условия возникновения пучностей стоячей волны, вывести координаты пучностей.
7. Условия возникновения узлов стоячей волны, вывести координаты пучностей.
8. Как связана длина волны с длиной струны?
9. Что такое собственная частота стоячей волны? Какими параметрами она определяется?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет к лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Краткую теорию и основные формулы для выполнения расчетов.
3. Таблицу с результатами измерений и вычисления.
4. Расчет погрешностей в определении собственных частот струны.
5. Вывод по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил принцип суперпозиции волн, овладел понятиями: интерференция волн, бегущая волна, стоячая волна; умеет выводить уравнение стоячей волны и координаты узлов и пучностей;

– правильно выполнил экспериментальную и расчетную части работы;

– составил отчет, соответствующий предъявляемым к нему требованиям;

– подготовил ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2016.

2. *Трофимова Т. И*. Курс физики. – М.: Академия, 2016.

3. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.

Лабораторная работа № 12
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение ускорения свободного падения тела.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Неинерциальные системы отсчета».
2. Приобретение навыков проведения физических измерений и умения обработки получаемых при этом данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Ускорение свободного падения (или ускорение силы тяжести) – ускорение, сообщаемое свободной материальной точке силой тяжести. Такое ускорение имело бы любое тело при падении на Землю с небольшой высоты в безвоздушном пространстве. Как и сила тяжести, ускорение свободного падения зависит от широты места и высоты его над уровнем моря.

Согласно принципу относительности любое движение, в том числе и свободное падение, относительно. Поэтому характер движения зависит от выбора системы отсчета (СО). СО делятся на **инерциальные системы отсчета** (ИСО) и **неинерциальные системы отсчета** (НИСО).

ИСО называют СО движущуюся равномерно и прямолинейно относительно некоторой выбранной инерциальной СО. В этом случае уравнения движения материальной точки относительно движущейся СО совпадают с уравнениями движения материальной точки относительно неподвижной СО, т.е. задаются законами Ньютона.

НИСО – это система отсчета, которая движется относительно ИСО с ускорением.

Рассмотрим движение материальной точки относительно НИСО.

3.1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета

Пусть имеется материальная точка массой m, на которую действует некоторая сила $\vec{F}$. Выберем неподвижную ИСО K. Если радиус – вектор материальной точки в системе K обозначить $\vec{r}$, то в инерциальной системе можно записать второй закон Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}. \qquad (1)$$

В НИСО K' начало координат движется по отношению к системе K по некоторому нелинейному закону $\vec{r}_0(t)$, где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начала O' в системе K. Из рис. 1 видно, что радиус-векторы материальной точки m в инерциальной $(\vec{r})$ и неинерциальной $(\vec{r}')$ системах связаны равенством

$$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{r}_0. \qquad (2)$$

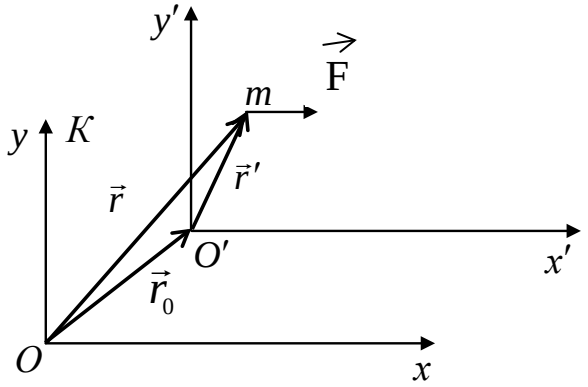

Рис. 1. Положение материальной точки в системах отсчета K и K'

Продифференцировав дважды это равенство по времени, получим:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}+\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} \text{ или } \vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0. \qquad (3)$$

Сила $\vec{F}$, действующая на частицу, не может измениться от того, что мы перейдем в другую систему отсчета, а ускорение, как это видно из (3), меняется, так как система K' неинерциальна и $\vec{a}_0\neq 0$. Следовательно, $m\vec{a}'\neq\vec{F}$, т.е. второй закон Ньютона нарушится.

В НИСО основной закон динамики Ньютона изменится. Вместе с силами $\vec{F}$, обусловленными воздействиями тел друг на друга,

возникнут силы особого рода – силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$, сообщающие телу ускорение $\vec{a}'$. Тогда в неинерциальных системах отсчета можно записать

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}. \quad (4)$$

Силы инерции обусловлены свойствами той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления и имеют различный вид.

Если K' – система движется поступательно с ускорением a_0 по отношению к K – системе, то сила инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\,\vec{a}_0 = \vec{F}_{\text{и}}. \quad (5)$$

Составляющая $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$ возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения системы отсчета. Она называется **поступательной силой инерции.**

Силы инерции отличаются от настоящих сил, обусловленных взаимодействием, следующим:

1. При переходе от одной НИСО к другой движущейся СО силы инерции меняются, а настоящие силы – нет.

2. Силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона. Если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к другому телу.

3. Силы инерции проявляются только в НИСО.

Реальна или фиктивна сила инерции? Смотря что принимать за слово «реальна». С точки зрения ньютоновской механики сила – результат воздействия других тел, в этом случае силы инерции надо рассматривать как фиктивные силы. Но с другой стороны, все взаимодействия осуществляются посредством силовых полей и передаются с конечными скоростями. И на силы инерции можно смотреть как на действия, которым подвергаются тела со стороны каких-либо реальных силовых полей. Эти поля преобразуются при переходе от одной системы координат к другой. Но это не дает основания считать эти силы фиктивными (электрические и магнитные поля тоже преобразуются при переходе от одной системы отсчета к другой, однако мы не сомневаемся в реальности этих полей).

Примеры проявления поступательной силы инерции:

1. Если человек сидит по ходу набирающего скорость поезда, то сила инерции прижимает пассажира к спинке сидения, если человек

сидит против хода поезда – то отбрасывается от спинки. Если поезд тормозит, то происходит все наоборот. При резком увеличении скорости во время запуска космического корабля у космонавта возникают перегрузки.

2. Маятник в ускоренно движущемся поезде. Сила инерции стремится отклонить маятник в сторону, противоположную ускорению.

3.2. Силы инерции при ускоренном произвольном движении системы отсчета

Если K' – система вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, неподвижной в K' – системе, то сила инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}} = m\omega^2 \vec{r} = \vec{F}_{\text{цб}}. \qquad (6)$$

Эту силу называют **центробежной силой инерции**, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, перпендикулярный оси вращения и характеризующий положение тела относительно этой оси. Центробежная сила направлена вдоль оси $\vec{r}$ от оси вращения.

Случаи проявления центробежной силы:

1. Пассажир в движущемся автобусе на повороте отклоняется в сторону, противоположную центру поворота.

2. В центрифуге белье или масло прижимается к стенкам центрифуги.

3. Пусть на горизонтально расположенном стержне на нитях висят три одинаковых шарика, причем шарики находятся на разных расстояниях от вертикальной оси, проходящей через середину стержня (рис. 2). Будем вращать стержень вокруг вертикальной оси (направление вращения указано стрелкой на рис. 2). Центробежные силы отклоняют шарики от оси вращения. Угол отклонения шариков от вертикали тем больше, чем дальше находятся шарики от оси вращения.

На тело, движущееся поступательно со скоростью $\vec{\upsilon}$ во вращающейся СО, кроме центробежной силы инерции действует еще одна сила инерции, называемая **силой Кориолиса**

$$\vec{F}_{\text{К}} = 2m\left[\vec{\upsilon},\vec{\omega}\right]. \qquad (7)$$

Вектор $\vec{F}_{\text{к}}$ перпендикулярен векторам скорости $\vec{\upsilon}$ тела и

угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ системы отсчета. Его направление определяется правилом правого винта.

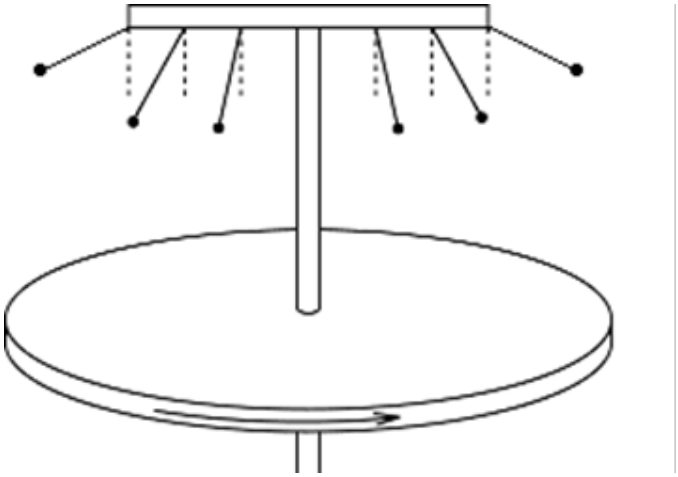

Рис. 2. Проявление центробежной силы инерции

Случаи проявления силы Кориолиса:

1. Пусть имеется покоящийся диск и вдоль радиуса диска движется шарик с постоянной скоростью υ (рис. 3).

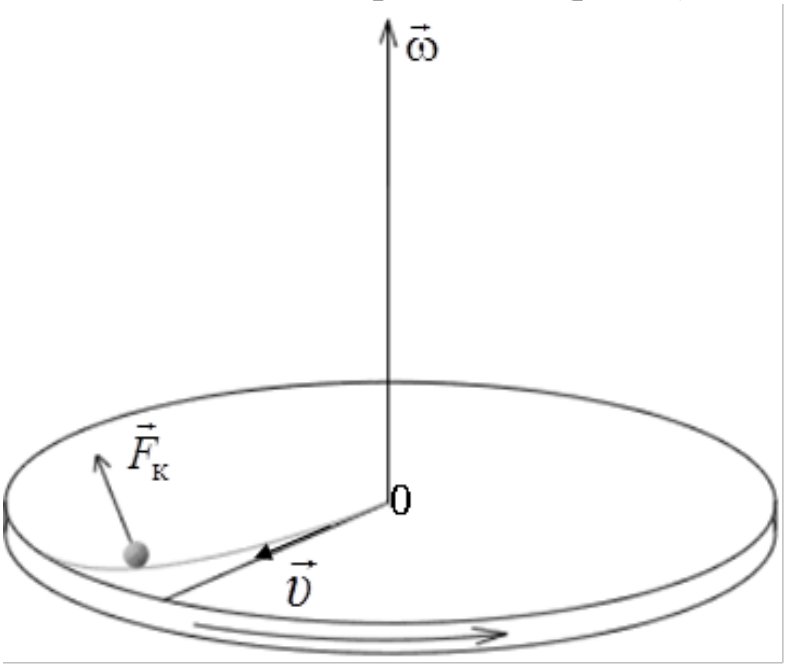

Рис. 3. Проявление силы Кориолиса

Начнем вращать диск с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Возникает сила Кориолиса $F_к = 2m\left[\vec{\upsilon}_{отн}, \vec{\omega}\right]$, которая перпендикулярна вектору $\vec{\upsilon}$

и вектору $\vec{\omega}$. Под действием этой силы шарик будет двигаться по дуге в плоскости диска.

2. Если человек в северном полушарии движется к полюсу по меридиану, то кориолисова сила будет отклонять его на восток. По этой же причине правые берега рек в северном полушарии обмываются быстрее, чем левые (реки текут на север).

3. Падающее тело отклоняется кориолисовой силой от направления отвеса к востоку и экватору (в северном полушарии).

Раскрывая содержание $\vec{F}_{\text{ин}}$ в формуле (4), основной закон динамики для НИСО можно записать в виде

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{и}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{к}}. \qquad (8)$$

При изучении движения тел относительно земной поверхности нужно иметь в виду, что СО, связанная с Землей, неинерциальна. Земной шар совершает сложное движение: вращается вокруг своей оси (суточное вращение) и движется по орбите вокруг Солнца (годичное вращение).

Центростремительное ускорение, соответствующее движению Земли по орбите (годичное вращение), гораздо меньше, чем центростремительное ускорение, связанное с суточным вращением Земли. Поэтому с достаточной точностью можно считать, что СО, связанная с Землей, вращается относительно инерциальных систем с постоянной угловой скоростью суточного (t = 86400 с) вращения Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 0,7292 \cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1}.$$

Если не учитывать вращение Земли, то тело, лежащее на ее поверхности, следует рассматривать как покоящееся, сумма действующих на это тело сил равнялось бы тогда нулю. На самом же деле любое тело на поверхности Земли, лежащее на географической широте φ (рис. 2), движется около оси земного шара, т.е. по кругу радиуса

$$r = R_{\text{з}}\cos\varphi$$

($R_{\text{з}}$ – радиус Земли, рассматриваемой в первом приближении в виде шара), с угловой скоростью ω. Следовательно, сумма сил, действующих на тело, отлична от нуля, равна

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R_{\text{з}} \cos\varphi. \qquad (9)$$

Сила $F_{\text{цб}}$ направлена перпендикулярно земной оси, это центробежная сила инерции.

Следует помнить, что центробежные силы, как и всякие силы инерции, существуют лишь в ускоренно движущихся (вращающихся) СО и исчезают при переходе к ИСО.

Наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения тел $\vec{g}$ будет обусловлено действием двух сил: $\vec{F}_g$, с которой тело притягивается Землей (сила гравитационного притяжения Земли), и $\vec{F}_{\text{цб}}$ (рис. 4).

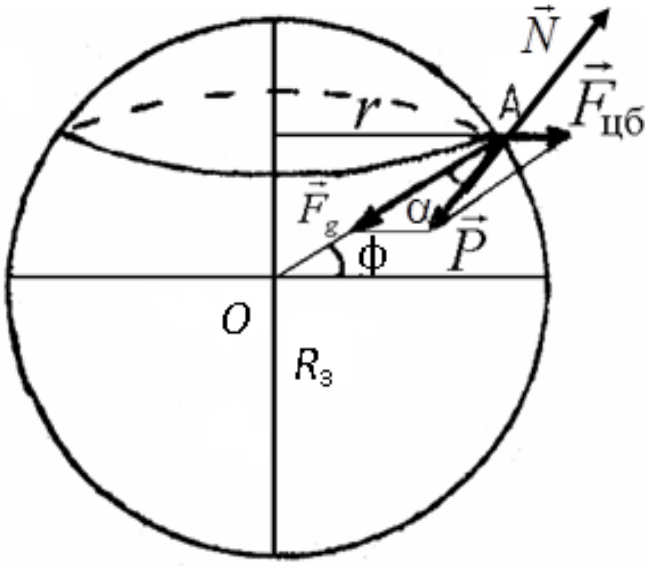

Рис. 4. Силы, действующие на тело на поверхности Земли

Результирующая этих двух сил

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{цб}}$$

есть сила тяжести

$$\vec{P} = m\vec{g}. \qquad (10)$$

Отличие силы тяжести $\vec{P}$ от силы притяжения к Земле $\vec{F}_g$ невелико, так как центробежная сила инерции значительно меньше, чем $\vec{F}_g$. Так, для массы в 1 кг $F_{\text{цб}} = m\omega^2 R_{\text{з}} \approx 0{,}035$ Н, в то время как $F_g = 9{,}8$ Н, т.е. почти в 300 раз больше, чем максимальное значение центробежной силы инерции (наблюдающееся на экваторе).

На полюсах $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ $F_{\text{цб}} = 0$, а на экваторе $(\varphi = 0)\, F_{\text{цб}} = m\omega^2 R_{\text{з}}$. Угол α между направлением $\vec{F}_g$ и $\vec{P}$ можно оценить, воспользовавшись теоремой синусов

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{F_{\text{цб}}}{P} = \frac{m\omega^2 R_{\text{з}} \cos\varphi}{mg},$$

заменяя синус малого угла приближенно значением самого угла, получим

$$\alpha \approx 0{,}0018 \sin 2\varphi.$$

В зависимости от географической широты φ угол α колеблется в пределах от 0 (на экваторе, где $\varphi = 0$ и на полюсах, где $\varphi = 90^\circ$) до 0,018 рад или $6'$ (на широте 45º).

Во всех точках земной поверхности, за исключением полюсов, сила тяжести тела меньше силы его гравитационного притяжения к Земле. На экваторе $F_g - P = 0{,}003F_g$. Везде, кроме полюсов и экватора, вектор $\vec{P}$ не перпендикулярен поверхности Земли. Вследствие суточного вращения Земли сила тяжести тела максимальна на полюсах, где она равна силе тяготения, и минимальна на экваторе.

Если бы Земля была правильным шаром со сферически симметричным распределением вещества в нем, то F_g должна была бы быть одной и той же на полюсе и на экваторе. В действительности на экваторе F_g меньше, чем на полюсе. Это объясняется сплюснутостью Земли, обусловленной действием центробежных сил. Точки экватора отстоят от центра Земли дальше, чем полюсы. Поэтому они притягиваются к центру Земли слабее, чем такие же точки на полюсе.

Ускорение свободного падения g меняется с широтой в переделах от 9,780 м/с^2 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах. На широте 45º оно равно 9,80665 м/с^2 и называется «нормальным» ускорением.

Ускорение свободного падения g является основной величиной, использующейся в гравиметрии – науке о земном поле силы тяжести и его связи с фигурой Земли, ее внутренним строением и строением Земной коры. Изучение гравитационного поля Земли позволяет

решить многие задачи геодезии и геофизики. Поскольку аномалии силы тяжести вызываются неравномерным распределением масс в земной коре, по характеру гравитационного поля можно судить о наличии изменений плотностей в районе исследования; так, возможно обнаружить различные геологические структуры и залежи полезных ископаемых. Периодические изменения g позволяют судить о приливных явлениях в твердой оболочке Земли, что в свою очередь дает возможность сделать выводы об упругих свойствах Земли.

Воспользовавшись уравнением (10) и пренебрегая влиянием суточного вращения Земли, найдем

$$g = \frac{P}{m} = \gamma \frac{M_з}{R^2} = \gamma \frac{M_з}{\left(R_з + h\right)^2}, \qquad (11)$$

где $R_з$ – радиус поверхности Земли; h – расстояние от центра тяжести тела до поверхности Земли.

Из (11) следует, что

а) ускорение свободно падающего тела не зависит от массы, размеров и других характеристик тела, поэтому все тела свободно падают (в отсутствии сил сопротивления среды) с одинаковыми ускорениями;

б) при удалении от поверхности Земли ускорение свободно падающего тела изменяется по закону

$$\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R}{R_з}\right)^2 = \left(\frac{R_з + h}{R_з}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{R_з}\right)^2,$$

где g и g_0 – ускорения тела при его свободном падении соответственно на высоте h и у поверхности Земли.

Вблизи поверхности Земли $h << R_з$ и

$$\frac{g_0}{g} \approx 1 + \frac{2h}{R_з},$$

т.е. с подъемом на 1 км ускорение силы тяжести уменьшается приблизительно на 0,03 %.

Измерить ускорение свободного падения можно при помощи:

а) математического маятника;

б) оборотного маятника, для которого возможно измерить

приведенную длину l и период T, а затем определить g из соотношения

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

в) наблюдением свободного падения тел, при котором путь h, пройденный телом за время t, связан с g соотношением

$$h = \frac{g t^2}{2}.$$

В данной работе использован последний метод определения g.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Установка для проведения опыта состоит из рейки длиной h =1 м с делениями (рис. 5).

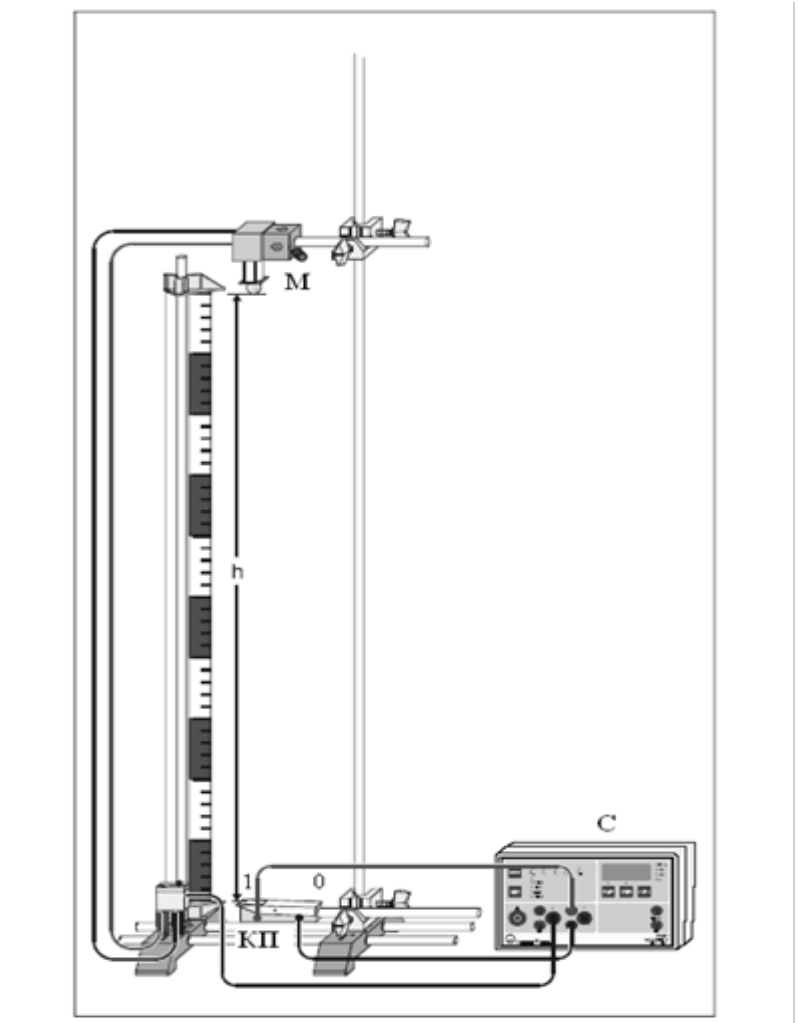

Рис. 5. Лабораторная установка

Электромагнит (М) служит для удержания стального шарика. Вдоль рейки может перемещаться ползунок с контактной поверхностью (КП) автоматически (при ударе шарика) выключающей секундомер С. Устанавливая КП на различную высоту вдоль рейки, можно изменять высоту падения h шарика. Таким образом, определяя время падения шарика с различных высот, можно опытным путем найти ускорение свободного падения g.

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

Для питания экспериментальной установки используется бытовая электросеть 220 В. Подсоединение установки к сети осуществляется проводом с двухполюсной вилкой. Все токоведущие части установки закрыты, что исключает их случайное касание. Вся установка заземлена.

При выполнении работы необходимо:

1. Внимательно ознакомится с заданием и оборудованием.
2. Проверить заземление установки и исправность токоведущих проводов, о замеченных неисправностях немедленно сообщить преподавателю.
3. Не загромождать рабочее место посторонними предметами.
4. Не оставлять без присмотра работающую лабораторную установку.
5. По окончании работы, отключить выключателем питание установки, вынуть вилку из розетки и привести в порядок рабочее место.

6. ЗАДАНИЕ

Определение ускорения свободного падения тела.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Ознакомьтесь с установкой и порядком выполнения работы.
2. Порядок выполнения работы:

а) установить электромагнит М на некоторой произвольной высоте *h*;

б) включить электросекундомер С в сеть;

в) установить на электросекундомере С функцию t_E нажатием кнопки MODE;

г) установить контактную поверхность в положение 1 (см. рис. 5);

д) нажать кнопку START на электросекундомере С;

е) закрепить шарик на электромагните М;

ж) перевести контактную поверхность КП в положение 0 (после чего шарик приходит в состояние свободного падения);

з) при ударе о КП шарик приводит ее в положение *1*;

и) снять показания с секундомера;

к) вернуть систему в исходное состояние.

3. Повторить измерения еще 4 раза.

4. Установить электромагнит на 3 различных значениях высоты падения h и измерить время падения шарика. При каждом значении высоты опыт повторить 5 раз.

5. По полученным результатам измерений вычислить ускорение свободного падения g.

6. Результаты измерений внести в табл. 1

7. Вычислить абсолютную и относительную погрешности определения g.

Таблица 1

№ измерения	h, м	t, с	t^2, с^2	g, м/с^2	Δg, м/с^2

8. Окончательный результат записать в виде

$$g = \left(g_{\text{ср}} \pm \Delta g\right) \text{ м с}^{-2}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \text{g}}{\text{g}_{\text{ср}}} 100\% .$$

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется свободным падением?

2. Что такое ускорение?

3. Какие системы отсчета называются инерциальными и какие – неинерциальными?

4. Как проявляются силы инерции?

5. Почему ускорение свободного падения не одинаково в различных точках земной поверхности?

6. Почему два небольших диска одинакового диаметра (картонный и металлический) падают в воздухе с различными ускорениями?

7. Зависит ли g от размеров тела?

8. Почему ускорение, соответствующее движению Земли по орбите значительно меньше ускорения, связанного с суточным вращением?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Краткую теорию.
3. Таблицу с результатами измерений и вычислений.
4. Расчет погрешности измерения ускорения свободного радения.
5. Вывод по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия инерциальной и неинерциальной системы отсчета, приводит примеры поступательной и центробежной силы инерции, силы Кориолиса, умеет рассчитывать эти силы и определять их направления;

– знает методы экспериментального определения ускорения свободного падения;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 13
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Проверка закона сохранения энергии с помощью маятника Максвелла.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентов по темам «Механическая энергия», «Кинематика и динамика вращательного движения».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных данных и оценки погрешностей результатов измерений.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Закон сохранения механической энергии

Различают два вида механической энергии (кинетическую и потенциальную), сумму которых называют **полной механической энергией** или просто механической энергией.

Кинетическая энергия – это энергия, которой тела обладают вследствие своего движения. Физический смысл кинетической энергии заключается в следующем: кинетическая энергия тела равна работе, которую оно способно совершить в процессе уменьшения своей скорости до нуля. Изменение кинетической энергии тела при некотором перемещении всегда равно работе результирующей силы, действующей на тело при этом перемещении,

$$dK = dA$$

или

$$K_2 - K_1 = A,$$

где K_1 и K_2 – кинетические энергии тела в его начальном и конечном состояниях.

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называют **механической системой** (системой). Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех тел системы, следовательно,

она зависит от массы и скорости тел системы и является функцией состояния ее движения.

Тела, образующие систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, подразделяют на внутренние и внешние. **Внутренними** называют силы, с которыми на данное тело действуют остальные тела системы; **внешними** – силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

Различают консервативные и диссипативные силы. **Консервативными** (потенциальными) называют силы, работа которых определяется только начальным и конечным положением тела и не зависит от его траектории. Силы, не удовлетворяющие этому условию, называют **диссипативными.**

Работа консервативной силы при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна убыли некоторой функции $П$, зависящей только от относительного расположения тел системы и характера сил взаимодействия между ними

$$dA_{\text{конс}} = \vec{F}d\vec{r} = -dП. \qquad (1)$$

Эту функцию и называют **потенциальной энергией** системы. Используя (1) можем записать

$$A_{\text{конс}} = \int \vec{F}d\vec{r} = П_1 - П_2 = -(П_2 - П_1) = -\Delta П. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что потенциальная энергия может быть определена с точностью до некоторой постоянной. Это, однако, не отражается на физических законах, поскольку в них входит либо разность потенциальных энергий тела (или системы) в двух состояниях, либо производная потенциальной энергии по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета потенциальной энергии), а энергию тела в другом положении отсчитывают относительно выбранного нулевого уровня. Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех тел системы.

Рассмотрим систему тел. Переведем систему из состояния 1 в состояние 2. При этом внутренние консервативные силы совершат работу $A_{\text{конс}}$, равную убыли потенциальной энергии системы,

$$A_{\text{конс}} = -\Delta П . \qquad (3)$$

Изменение же кинетической энергии системы тел равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тела этой системы (консервативных и диссипативных)

$$\Delta К = A. \qquad (4)$$

Используя (3) и (4) можно записать

$$\Delta К + \Delta П = \Delta(К + П) = \Delta E = A - A_{\text{конс}}$$

или

$$\Delta E = A', \qquad (5)$$

где ΔE – изменение полной механической энергии системы тел; A' – работа внутренних диссипативных и внешних сил при переходе системы из состояния 1 в состояние 2.

Из (5) следует, что изменение механической энергии системы равно работе внутренних диссипативных и всех внешних сил при данном переходе системы из одного состояния в другое.

В частности, для замкнутой консервативной системы тел

$$\Delta E = 0 \text{ и } E = К + П = \text{const}.$$

Мы получили **закон сохранения механической энергии**: полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

Если в замкнутой системе действуют консервативные и диссипативные силы, то полная механическая энергия не сохраняется, работа диссипативных сил ($A_{\text{дис}}$) равна изменению механической энергии системы

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{дис}}.$$

3.2. Маятник Максвелла

Разберем переход потенциальной энергии в кинетическую энергию на примере движения маятника Максвелла.

Маятник Максвелла (рис. 1) представляет собой диск *1*, туго насаженный на стержень *2*, к концам которого прикреплены две крепкие (капроновые) нити *3*. Они наматываются на стержень (от концов его к диску). Диск маятника представляет собой непосредственно сам диск и сменные кольца, которые насаживаются на диск.

Если нити намотать на стержень и маятник отпустить, то он начнет двигаться поступательно вниз, вращаясь при этом вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке движения (когда нити уже размотаны), приведет вновь к наматыванию нитей на стержень и подъему маятника. Движение маятника при этом снова замедлится, маятник остановится и снова начнет двигаться вниз и т.д. Таким образом, будет иметь место колебательное движение маятника Максвелла вверх и вниз.

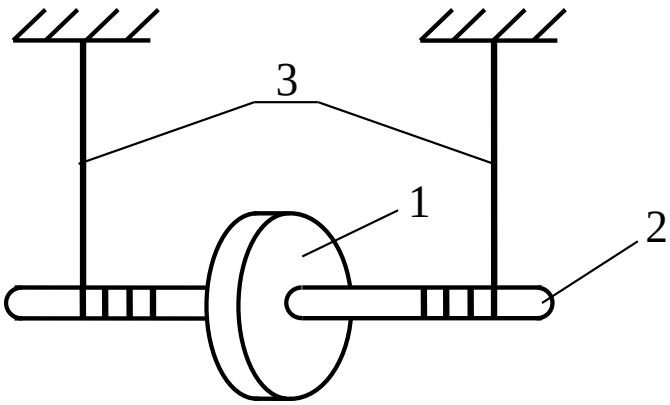

Рис. 1. Маятник Максвелла

Кинетическая энергия маятника в верхней точке траектории будет равна нулю. Если за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии маятника принять уровень, соответствующий положению центра масс маятника в нижней точке, то его потенциальная энергия в верхней точке окажется равной

$$П = m g h,$$

где h – ход маятника (расстояние, проходимое центром масс маятника между его крайними положениями).

При движении маятника вниз его потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая увеличивается. В нижней точке потенциальная энергия маятника станет равной нулю, а кинетическая энергия достигнет максимально возможного значения.

При поступательном движении тела массой m все его точки двигаются с одинаковой скоростью υ. В случае если скорость υ много меньше скорости света, кинетическую энергию тела вычисляют по формуле

$$K_{\text{пост}} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Когда тело совершает вращательное движение с угловой скоростью ω, его кинетическую энергию можно вычислить по формуле

$$K_{\text{вр}} = \frac{J\,\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения.

Полная кинетическая энергия маятника складывается из энергии поступательного движения его центра масс и из энергии вращения маятника вокруг оси

$$K = K_{\text{пост}} + K_{\text{вр}} = \frac{m\upsilon_c^{\,2}}{2} + \frac{J_c\,\omega^2}{2},$$

где m – масса маятника; J_c – момент инерции маятника относительно оси вращения; υ_c – линейная скорость центра масс маятника; ω – угловая скорость вращения маятника в системе отсчета, связанной с его центром масс.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Работа выполняется на установке, показанной на рис. 2.

Установка представляет собой стойку, состоящую из основания *1* и несущей штанги *2*, на которой крепятся неподвижный верхний кронштейн *3* и подвижный нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком *4*. Основание оснащено регулируемыми ножками *5*, которые позволяют проводить выравнивание прибора. На верхнем кронштейне находятся электромагнит *6* и вороток *7* для закрепления и регулирования длины бифилярной подвески маятника *8*. На кронштейнах находятся разъемы *9, 10* для подключения электронного блока ФМ-1/1.

Маятник с наложенным кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Длина маятника определяется по миллиметровой шкале на несущей штанге *2* прибора. С целью облегчения этого измерения на несущей штанге находится красный указатель, который располагают на высоте оси кольца в нижнем положении маятника.

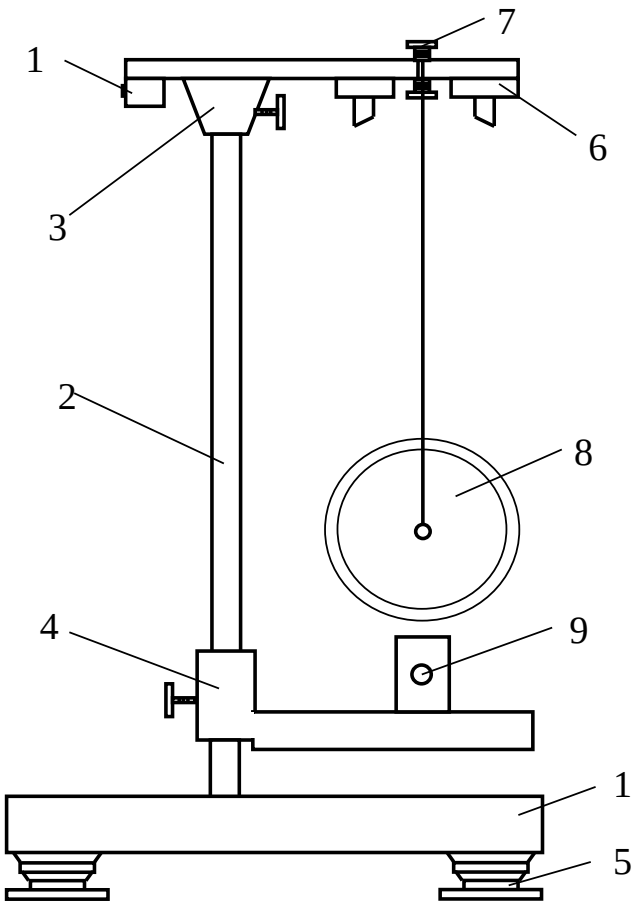

Рис. 2. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и оборудованием.

2. О замеченных неисправностях немедленно сообщите лаборанту или преподавателю.

3. Не загромождайте рабочее место предметами, не относящимися к выполняемой работе.

4. Тщательно закрепляйте сменные кольца на диске, чтобы они не слетали при раскручивании маятника.

5. Следите за равномерной намоткой нити на стержень.

6. По окончании работы обесточьте прибор и приведите в порядок свое рабочее место.

6. ЗАДАНИЯ

1. Определение момента инерции маятника Максвелла.

2. Экспериментальная проверка закона сохранения механической энергии.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Определение момента инерции маятника Максвелла

1. Измерить радиус оси r маятника Максвелла, радиус диска $R_д$ и средний радиус $R_к$ и ширину b кольца.

2. Записать в табл. 1 значения массы оси маятника m_0, массы диска $m_д$, массы кольца $m_к$ (приведены на панели установки).

3. Вычислить моменты инерции оси J_0 маятника, диска $J_д$, кольца $I_к$ и всего маятника Максвелла I по формулам

$$J_0 = \frac{m_0 r^2}{2},$$

$$J_д = \frac{m_д R_д^2}{2},$$

$$J_к = m_к \left(R_к^2 + \frac{b^2}{4} \right),$$

$$J = J_0 + J_д + J_к .$$

4. Результаты измерений и вычислений занести в табл. 1.

Таблица 1

m_0, кг	r, м	J_0, кг·м^2	$m_д$, кг	$R_д$, м	$J_д$, кг·м^2	$m_к$, кг	$R_к$, м	b, м	$J_к$, кг·м^2	J, кг·м^2

Задание 2. Экспериментальная проверка закона сохранения механической энергии

1. Проверить устойчивость прибора. Произвести регулировку положения основания установки при помощи регулировочных опор

и регулировку нижнего кронштейна так, чтобы диск на бифилярном подвесе находится в центре окна фотодатчика.

2. Установить необходимую длину бифилярного подвеса, чтобы нижний край диска маятника находился на 4–5 мм ниже оптической оси фотодатчика; при этом ось маятника должна занять горизонтальное положение.

3. Наложить на диск кольцо.

4. Подключить фотодатчик и электромагнит к электронному блоку ФМ-1/1. Нажать кнопку «СЕТЬ». При этом должно включиться табло индикации секундомера.

5. Аккуратно вращая маятник зафиксировать его в верхнем положении при помощи электромагнита, при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось виток к витку. В зафиксированном положении нити подвеса должны быть прослаблены.

6. Нажать на кнопку «СБРОС» для того, чтобы убедиться, что на индикаторах установились нули.

7. Нажать на кнопку «ПУСК». Происходит растормаживание электромагнита, маятник начинает опускаться, и таймер электронного блока начинает отсчет времени. При первом пересечении маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Записать показания таймера, т.е. время движения груза t. Нажать клавишу сброс.

8. По шкале стойки определить ход маятника h.

9. При фиксированном значении h повторить опыт до 5–6 раз.

10. Вычислить среднее время по формуле

$$t_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}.$$

11. По среднему времени t и проходимому маятником расстоянию h вычислить ускорение a поступательного движения центра масс маятника из уравнения

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

12. Линейную скорость центра масс мятника υ и угловую скорость ω его вращения в нижней точке траектории рассчитать по формулам

$$\upsilon = at;\ \omega = \varepsilon t,$$

где ε – угловое ускорение $\left(\varepsilon = \frac{a}{R_к}\right)$.

13. Рассчитать кинетическую энергию маятника Максвелла в нижней точке по формуле

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

14. Рассчитать начальную потенциальную энергию маятника

$$П = mgh,$$

где m – масса маятника, равная сумме масс его частей

$$m = m_0 + m_д + m_к.$$

15. Результаты измерений и вычислений занести в табл. 2.

Таблица 2

№	m, кг	h, м	t, с	$t_{ср}$ с	a, м/с	υ, м/с	ω, рад/с	m, кг	J, кг·м^2	K, Дж	ΔK, Дж	$П$, Дж	$\Delta П$, Дж
1													
2													
…													

16. Вычислить абсолютную и относительную погрешности определения кинетической и потенциальной энергий и записать конечный результат для кинетической и потенциальной энергии, указав значения погрешностей их определения. При расчетах погрешностью в определении момента инерции маятника пренебречь.

17. Окончательный результат записать в виде

$$K = \left(K_{ср} \pm \Delta K\right) \text{ Дж}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta K}{K_{ср}} 100\%$$

$$П = \left(П_{ср} \pm \Delta П\right) \text{ Дж}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta П}{П_{ср}} 100\%.$$

18. Сделать вывод по результатам работы.

Контрольные вопросы

1. Что такое энергия? Какие виды энергии вы знаете?
2. Как формулируется закон сохранения механической энергии?
3. Что называют механической системой? Какие системы называют замкнутыми?
4. Какие силы называют консервативными и какие диссипативными? Приведите примеры таких сил.
5. Что такое потенциальная энергия? От чего она зависит?
6. Что такое кинетическая энергия? Как определяется кинетическая энергия поступательного и вращательного движений? Запишите формулы, раскройте смысл величин, входящих в них.
7. Что представляет собой маятник Максвелла? Какое движение он совершает? Как он используется для проверки закона сохранения механической энергии?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет к лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.
2. Методику проверки закона сохранения механической энергии с помощью маятника Максвелла.
3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.
4. Расчет погрешностей определения кинетической и потенциальной энергий маятника Максвелла.
5. Запись конечного результата для кинетической и потенциальной энергии с указанием значений погрешностей их определения.
6. Вывод по результатам работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– овладел понятиями механическая система, кинетическая и потенциальная энергия, внутренние, внешние, консервативные и диссипативные силы, формулирует закон сохранения механической энергии, приводит примеры выполнения этого закона;

– решает типовые задачи на закон сохранения механической энергии;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми к нему требованиями;

– сформулировал вывод о проделанной работе;

– подготовил ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2016.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 101
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ДИСКА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

1. ЦЕЛИ РАБОТЫ

1. Определение момента инерции сплошного диска относительно оси вращения при различных расстояниях между этой осью и осью симметрии.

2. Экспериментальная проверка теоремы Штейнера.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Механика твердого тела».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Момент инерции. Теорема Штейнера

Моментом инерции материальной точки относительно оси называют произведение ее массы m_i на квадрат расстояния r_i от этой материальной точки до оси

$$J_i = m_i r_i^2 .$$

Моментом инерции тела относительно оси называют сумму моментов инерции материальных точек, из которых состоит тело, относительно этой оси

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Представим тело состоящим из бесконечно малых частей объемом dV и массы dm. Тогда момент инерции каждой малой части относительно оси будет равен

$$dJ = r^2 dm .$$

Интегрируя данное уравнение по всей массе, получим момент инерции тела относительно оси

$$J = \int_m r^2 dm , \qquad (1)$$

где r – расстояние от малой части тела объемом dV до рассматриваемой оси.

Так как $dm = \rho dV$, где ρ – плотность тела в данном объеме dV, уравнение (1) можно записать в виде

$$J = \int_V r^2 \rho dV . \qquad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что момент инерции тела зависит от материала, формы, размеров тела, а также от распределения массы тела относительно оси.

Если тело однородно, то плотность ρ во всех его областях одинакова, в этом случае

$$J = \rho \int_V r^2 dV . \qquad (3)$$

В табл. 1 приведены значения моментов инерции некоторых однородных тел простейшей формы относительно определенных осей симметрии, которые можно получить, решив уравнение (3).

Таблица 1

Тело	Положение оси C	Момент инерции J_C
Прямой тонкий стержень длины l и массы m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Сплошной цилиндр (диск) радиуса R и массы m	Ось симметрии цилиндра (диска)	$\frac{1}{2}mR^2$
Полый тонкостенный цилиндр (обруч, кольцо) радиуса R и массы m	Ось симметрии цилиндра (обруча, кольца)	mR^2
Шар радиуса R и массы m	Ось симметрии проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Каждое из приведенных в таблице значений моментов инерции рассчитано относительно оси, проходящей через центр масс тела. Зная эти значения, можно легко вычислить момент инерции тела относительно произвольной оси, параллельной той, которая проходит через центр масс. Это можно сделать с помощью **теоремы Штейнера**, согласно которой момент инерции J тела относительно

произвольной оси равен сумме момента инерции J_C тела относительно оси, параллельной взятой и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями

$$J = J_C + ma^2. \quad (4)$$

Момент инерции тела относительно оси является **мерой инертности тела при вращательном движении**, подобно тому, как масса является мерой инертности тела при поступательном движении. Момент инерции зависит не только от массы тела, но и от распределения массы относительно оси. Каждое тело независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

3.2. Метод крутильных колебаний

Рассмотрим поведение диска, который может вращаться вокруг закрепленной вертикальной оси, перпендикулярной плоскости диска. Пусть к диску будет прикреплен внешний конец спиралевидной пружины, другой конец которой (внутренний) прикреплен к оси. Если диск повернуть вокруг оси на некоторый угол, а затем предоставить самому себе, то он будет совершать вращательное колебательное движение. Это движение подобно тому, как ведет себя маятник в механических часах. Величина вращающегося момента силы упругости M, возникающего при деформации пружины и заставляющего ее вернуться в недеформированное состояние, прямо пропорциональна углу φ отклонения диска от равновесного положения

$$M = -D \cdot \varphi, \quad (5)$$

где D – модуль кручения пружины.

Наличие знака «минус» в (5) обусловлено тем, что вектор момента силы $\vec{M}$ направлен противоположно вектору изменения угла поворота $d\vec{\varphi}$.

Если пренебречь трением диска об ось и действием на него воздуха, то основной закон динамики вращательного движения применительно к диску запишется как

$$M = J \cdot \varepsilon, \quad (6)$$

где J – момент инерции диска относительно оси вращения, а $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – это угловое ускорение диска.

Исключая из уравнений (5) и (6) M, получим дифференциальное уравнение гармонических незатухающих колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J}\varphi,$$

решением, которого является гармоническая функция $\varphi(t)$

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{J}}$ – циклическая частота колебаний диска.

Выразив ω_0 через период колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

получим

$$J = \frac{T^2 D}{4\pi^2}. \qquad (7)$$

Таким образом, зная модуль кручения пружины D и измерив период колебаний диска, можно определить момент инерции диска относительно оси вращения.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Установка для определения момента инерции диска относительно различных осей, перпендикулярных плоскости диска, изображена на рис. 1.

В состав установки входят: сплошной диск *1* с отверстиями, торсионная ось вращения с пружиной, закрытая защитным кожухом *2*, опора *V*-образной формы *3* и таймер *4*.

Рис. 1. Экспериментальная установка

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и лабораторной установкой.
2. Сообщите преподавателю или лаборанту о замеченных неисправностях.
3. Не загромождайте рабочее место предметами, не относящимися к выполняемой работе.
4. По окончании работы приведите в порядок свое рабочее место.

6. ЗАДАНИЕ

Определение момента инерции сплошного диска относительно оси вращения при различных расстояниях между этой осью и осью симметрии. Экспериментальная проверка теоремы Штейнера.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Закрепить центр диска на оси вращения и установить его в состояние равновесия на столе.
2. Повернуть диск на 180º от положения равновесия и отпустить.
3. Определить время t_1 5 полных колебаний диска.
4. Повторить опыт еще 2 раза, измеряя время t_2 и t_3.
5. Определить период колебаний T диска, поделив среднее время $t_{\text{ср}}$ на число колебаний

$$T = \frac{t_{\text{ср}}}{N}.$$

6. Установить диск на оси вращения таким образом, чтобы она находилась на расстоянии 2 см от его центра. Провести эксперимент и расчет периода, повторив п. 2–4.

7. Повторить измерения при расстояниях от центра диска до оси вращения, равных 4, 6, 8 см.

8. По формуле (7), рассчитать моменты инерции диска относительно оси вращения для всех расстояний от нее до центра диска, включая нулевое. Модуль кручения пружины принять равным D = 0,033 Н·м/рад.

9. Результаты измерений и вычислений внести в табл. 2.

Таблица 2

a, см	a^2, см^2	t_1, с	t_2, с	t_3, с	$t_{ср}$, с	T, с	J, кг·м^2	$J_{теор}$, кг·м^2

10. Рассчитать теоретические значения момента инерции диска $J_{теор}$, относительно оси вращения для всех расстояний от нее до центра диска, включая нулевое. Использовать теорему Штейнера (4). Данные занести в таблицу. Масса диска равна 704 г.

11. На одном графике построить графики зависимостей момента инерции тела для экспериментальных (J) и теоретических значений моментов инерции ($J_{теор}$) от квадрата расстояния a^2 между осью вращения и параллельной осью, проходящей через центр масс диска.

12. По виду зависимостей $J = f(a^2)$ сделать вывод о выполнении или невыполнении теоремы Штейнера.

13. Сравнить теоретические и экспериментально найденные значения моментов инерции диска относительно оси симметрии.

Контрольные вопросы

1. Что называют моментом инерции материальной точки относительно оси? Что называют моментом инерции тела относительно оси?

2. Каков физический смысл момента инерции?

3. В чем суть теоремы Штейнера?

4. Как теорема Штейнера проверяется экспериментально?

5. Как рассчитать момент инерции диска относительно оси симметрии?

6. Вычислить момент инерции полого цилиндра относительно оси, совпадающей с его образующей (сплошного шара относительно оси, касательной к его поверхности; тонкого однородного стержня относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его конец).

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.

2. Теоретические основы применения метода крутильных колебаний для определения моментов инерции тел относительно различных осей.

3. Таблицу с результатами измерений и вычислений.

4. Расчет погрешностей измерений (по указанию преподавателя).

5. Графики зависимостей $J = f(a^2)$ и $J_{теор} = f(a^2)$.

6. Краткое заключение (выводы) по результатам работы: обобщение того, что сделано в работе, сравнение теоретически рассчитанных и экспериментально полученных значений момента инерции диска относительно оси симметрии, заключение о выполнении или нарушении теоремы Штейнера, предложения по усовершенствованию лабораторной установки и по проведению работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– овладел понятиями момента инерции материальной точки и тела относительно оси, знает физический смысл момента инерции, понимает суть теорему Штейнера;

– решает типовые задачи на применение теоремы Штейнера;

– правильно выполнил эксперимент и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми к нему требованиями;

– подготовил исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.

2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.

3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Academia, 2016.

Лабораторная работа № 102
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ УНИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение законов сохранения момента импульса и энергии.

2. Определение скорости полета пули по измерению периода колебаний и угла поворота крутильного баллистического маятника.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний студентами по теме «Момент импульса. Законы сохранения момента импульса и энергии».

2. Приобретение навыков проведения физических измерений и умения обработки получаемых при этом данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Момент импульса

Метод определения скорости полета пули с помощью крутильного баллистического маятника основан на использовании законов сохранения момента импульса и механической энергии.

Моментом импульса материальной точки *A* относительно неподвижной точки *O* (рис. 1) называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки *O* до точки *A*, на вектор импульса $\vec{p}$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}],$$

где m – масса материальной точки; υ – ее скорость.

Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.

Модуль момента импульса равен

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = pl,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$; $r \cdot \sin\alpha = l$ – плечо импульса относительно точки *O* (т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки *O* на прямую, вдоль которой направлен $\vec{p}$).

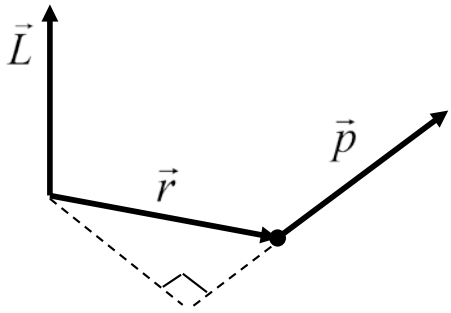

Рис. 1. Момент импульса относительно неподвижной точки *O*

Моментом импульса относительно неподвижной оси *Z* называют скалярную величину L_z, равную проекции на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки *O* данной оси *Z* (рис. 2). Значение L_z не зависит от выбора точки положения *O* на оси *Z*.

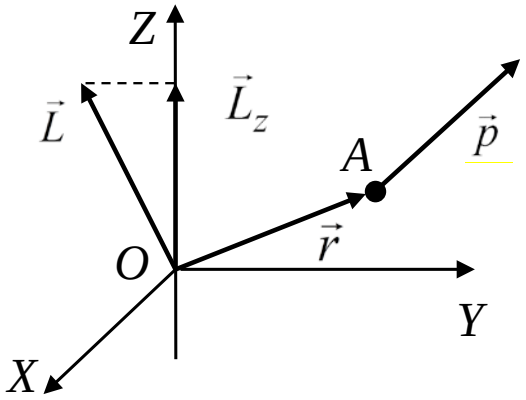

Рис. 2. Момент импульса $\vec{L}$ относительно неподвижной оси *Z*

При вращении абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси *Z* каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью υ_i. Скорость $\vec{\upsilon}_i$ и импульс $m_i\vec{\upsilon}_i$ перпендикулярны этому радиусу, поэтому радиус является плечом вектора $m_i\vec{\upsilon}_i$. Момент импульса отдельной частицы будет равен

$$L_i = m_i \upsilon_i r_i$$

и направлен по оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси равен сумме моментов импульса отдельных частиц

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i .$$

Учитывая, что $\upsilon_i = \omega r_i$ получаем

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega .$$

Силой называют векторную физическую величину, являющуюся мерой воздействия на тело других тел и полей.

Силы, работа которых определяется только начальным и конечным положением тела и не зависит от формы траектории, называют **консервативными** или потенциальными. Силы, работа которых зависит от траектории перемещающегося тела из одной точки в другую, называют **диссипативными** (неконсервативными).

Совокупность материальных точек или тел, выделенных для рассмотрения, называют **механической системой**. Силы взаимодействия между телами системы называют внутренними. Силы, с которыми на тела системы действуют внешние тела, называют внешними. Если на механическую систему тел внешние силы не действуют, то такую систему называют **замкнутой** или **изолированной.**

Количественной мерой различных форм движения и взаимодействия материи является энергия. В соответствии с различными формами движения и взаимодействия материи энергию подразделяют на механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и другие виды.

Различают два вида механической энергии (кинетическую и потенциальную), сумму которых называют полной механической энергией или просто **механической энергией.**

Кинетическая энергия – это энергия, которой тела обладают вследствие своего движения. Физический смысл кинетической энергии заключается в следующем: кинетическая энергия тела равна работе, которую оно способно совершить в процессе уменьшения своей скорости до нуля. Изменение кинетической энергии тела при некотором перемещении равно работе результирующей силы, действующей на тело при этом перемещении.

Работа консервативной силы при бесконечно малом изменении конфигурации системы равна убыли некоторой функции, зависящей только от относительного расположения тел системы и характера сил взаимодействия между ними. Эту функцию и называют **потенциальной энергией** системы.

Согласно **закону сохранения механической энергии**, полная механическая энергия системы тел в отсутствии диссипативных сил (как внутренних, так и внешних) остается постоянной.

Если между телами системы или на тела системы, кроме консервативных сил, действуют диссипативные силы, то полная механическая энергия не сохраняется. Работа диссипативных сил равна изменению полной механической энергии. Утверждение о том, что момент импульса замкнутой системы остается постоянным, выражает **закон сохранения момента импульса.**

3.2. Крутильный баллистический маятник

Баллистическим маятником называют тяжелое тело, подвешенное на длинной проволоке (нити). Крутильный баллистический маятник – это маятник, совершающий повороты вокруг неподвижной оси то в одну, то в другую сторону.

Крутильный баллистический маятник совершает гармонические колебания при малых углах поворота φ, если действующий на него вращающий момент M пропорционален углу поворота

$$M = -D\,\varphi, \qquad (1)$$

где D – коэффициент, называемый модулем кручения проволоки (коэффициентом момента упругих сил или коэффициентом упругости при крутильных колебаниях).

Величина D зависит от длины проволоки, ее диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon, \qquad (2)$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения; ε – угловое ускорение, равное второй производной угла поворота φ по времени $\left(\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}\right)$.

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{D}{J}\varphi=0.$$

Обозначим

$$\omega_0^2=\frac{D}{J}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega_0{}^2\varphi=0 \qquad (3)$$

ω_0 – собственная частота колебаний маятника.

Решением уравнения (3) является функция $\varphi(t)$

$$\varphi=\varphi_0\cos\left(\omega_0 t+\alpha\right)$$

так как период колебаний связан с частотой соотношением

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Получаем, что модуль кручения можно определить зная период T

$$D=\frac{4\pi^2}{T^2}J. \qquad (4)$$

Представим маятник в виде подвешенного на проволоке стержня с магнитными мишенями на его концах (рис. 3).

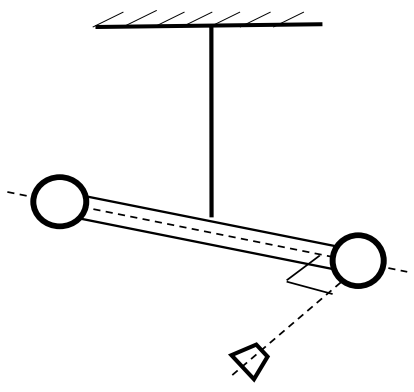

Рис. 3. Стержень с мишенями

Пуля массы $m_{\text{П}}$, летящая горизонтально со скоростью υ перпендикулярно к стержню, обладает импульсом $p=m_{\text{П}}\upsilon$. Попав в мишень, пуля начинает двигаться по окружности радиуса r. Момент

импульса пули относительно оси вращения маятника перед столкновением с мишенью равен

$$L = p \cdot r = m_{\text{п}} \cdot \upsilon \cdot r\,.$$

Пуля, попав в мишень, останавливается в ней и начинает двигаться с маятником как одно целое. Согласно закону сохранения момента импульса

$$m_{\text{п}} \upsilon r = J\,\omega, \qquad (5)$$

где J – момент инерции маятника с пулей относительно оси вращения маятника; ω – угловая скорость маятника; $J\omega$ – момент импульса маятника с пулей; r – расстояние от линии, вдоль которой движется пуля, до оси вращения маятника.

Момент инерции маятника ($J_{\text{м}}$), используемого в данной работе, складывается из момента инерции стационарной части маятника J_0 (проволоки, стержней, мишеней) и момента инерции двух перемещаемых грузов

$$J_{\text{м}} = J_0 + 2m_{\text{гр}}R^2,$$

где R – расстояние от грузов до оси вращения; $m_{\text{гр}}$ – масса каждого из грузов.

Момент инерции пули

$$J_{\text{п}} = m_{\text{п}}\, r^2.$$

Момент инерции маятника с пулей равен

$$J = J_{\text{м}} + J_{\text{п}} = J_0 + 2m_{\text{гр}}R^2 + m_{\text{п}}\, r^2. \qquad (6)$$

Упругая сила, возникающая в проволоке при ее закручивании (повороте), будет противодействовать вращению маятника. Согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия маятника (энергия вращательного движения) после взаимодействия с пулей равна потенциальной энергии проволоки при ее закручивании

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{D\varphi^2}{2}, \qquad (7)$$

где φ – угол поворота маятника.

Решая совместно уравнения (5) и (7) получим

$$\upsilon = \frac{\varphi}{m_{\text{п}} r}\sqrt{JD}\,. \qquad (8)$$

С учетом (4) уравнение (8) запишем в виде

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi}{m_{\text{п}} r T} J \,. \tag{9}$$

Из уравнения (4) следует

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{D} = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{гр}} R^2 + m_{\text{п}} r^2}{D}. \tag{10}$$

Для двух разных положений грузов можно записать

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{гр}} R_1^2 + m_{\text{п}} r^2}{D}$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + 2m_{\text{гр}} R_2^2 + m_{\text{п}} r^2}{D}. \tag{11}$$

Из уравнений (11) следует, что

$$J_0 = \frac{2m_{\text{гр}}(T_1^2 R_2^2 - T_2^2 R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} - m_{\text{п}} r^2 \,. \tag{12}$$

После подстановки (12) в (6) уравнение (9) можно записать в виде

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi}{m_{\text{п}} r T_1} J_1 = \frac{2\pi\varphi}{m_{\text{п}} r T_1} \left(\frac{2m_{\text{гр}}(T_1^2 R_2^2 - T_2^2 R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} + 2m_{\text{гр}} R_1^2 \right)$$

или

$$\upsilon = \frac{4\pi m_{\text{гр}} \varphi \, T_1 (R_2^2 - R_1^2)}{m_{\text{п}} \, r \, (T_2^2 - T_1^2)}. \tag{13}$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 4.

Установка представляет собой горизонтальное основание *1*, опирающееся на три ножки регулируемой высоты. На основании установлена вертикальная стойка *2* с горизонтальными кронштейнами *3*, *4*, *5*. На кронштейне *3* укреплена рамка фотодатчика *6*. К кронштейнам *4*, *5* на проволоке крепится рамка крутильного баллистического маятника *7*. На рамке закреплены подвижные грузы (8) с помощью резьбовой оси *9* и мишени *10* на оси *11*. Отклонение

рамки фиксируется с помощью круговой шкалы *12* на горизонтальной платформе *13* и указателя *14*, жестко закрепленного на рамке. На пластине *13* установлена катапульта *15*, запускающая в маятник пулю. Катапульта должна быть установлена перпендикулярно к плоскости рамки маятника и направлена в центр мишени с прикрепленным к ней магнитом. Перед началом работы установку необходимо выровнять в горизонтальной плоскости, используя регулировочные ножки, и подключить к фотодатчику электронный секундомер (16).

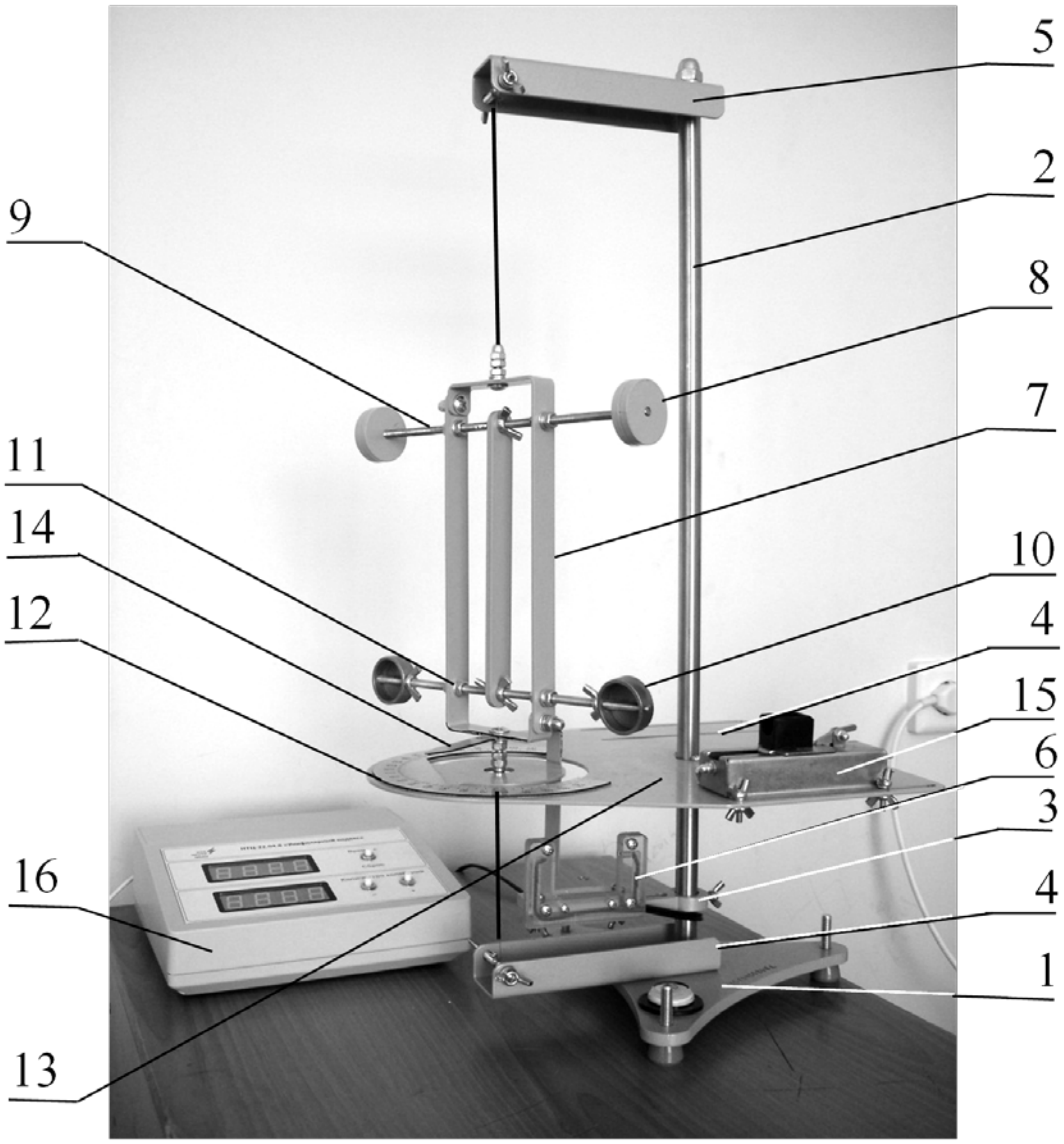

Рис. 4. Унифилярный подвес

Внимание: подключение производить только при отключенном питании электронного секундомера.

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКИ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Не загромождать рабочее место посторонними предметами (одеждой, сумками и т.д.).

2. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и оборудованием.

3. На стреляющем устройстве пулю располагайте строго в направляющем стержне, чтобы она не попала в прозрачную шкалу или в аудиторию.

4. По окончании работы приведите в порядок свое рабочее место. Отключите секундомер.

6. ЗАДАНИЕ

Определение скорости полета пули по измерению периода колебаний и угла поворота крутильного баллистического маятника.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Подвижные грузы на верхнем горизонтальном стержне маятника максимально приблизить друг к другу ($R_1 = R_{min}$). Измерить расстояние R_1 между центрами грузов и осью колебания маятника.

2. Установить катапульту с пулей перпендикулярно плоскости мишени.

3. В центр мишени со стороны пули прикрепить магнитную пластину.

4. Взвести механизм, сдвинув катапульту до упора и закрепив специальным рычагом.

5. Перевести тумблер на задней панели секундомера из положения «*Off*» в положение «*On*».

6. На секундомере с помощью кнопок «+» и «-» выставить требуемое количество колебаний (N=10).

7. Произвести выстрел.

8. Определить угол φ наибольшего отклонения стрелки маятника по шкале и время 10 колебаний маятника.

9. Измерить расстояние r между осью колебаний маятника и местом попадания пули на мишень.

10. Измерения повторить еще 2 раза. По среднему значению времени вычислить период T_1 колебаний маятника.

11. Используя измеренные значения φ и r, найти их средние значения $\varphi_{ср}$ и $r_{ср}$.

12. Максимально отдалить грузы на верхнем горизонтальном стержне друг от друга и измерить расстояние между центрами грузов и осью маятника ($R_2 = R_{max}$).

13. Прикрепить пулю к магнитной пластине на мишени на расстоянии $r_{ср}$ от оси колебания маятника.

14. Отклонить маятник на угол $\varphi_{ср}$ и измерить секундомером время N=10 колебаний маятника.

15. Измерения повторить еще 2 раза. По среднему значению времени вычислить период T_2 колебаний маятника.

16. По формуле (13) вычислить скорость полета пули, приняв массу пули $m_п$=(10,4 ± 0,1) г. На верхнем горизонтальном стержне крепятся четыре диска (по два диска вместе с каждой стороны от оси вращения). Масса одного диска $m_{диска}$=(55,0 ± 0,5) г. Поэтому массу груза принять равной $m_{гр}$=(111 ± 1) г. При расчетах угол $\varphi_{ср}$ выразить в радианах.

17. Все результаты измерений и вычислений занести в табл. 1

18. Рассчитать погрешности определения скорости полета пули.

19. Окончательный результат записать в виде

$$\upsilon = \left(\upsilon_{ср} \pm \Delta\upsilon\right) \text{ м / с}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_{ср}} 100\% .$$

Таблица 1

№ измер	$\varphi_{ср}$, град	$r_{ср}$, м	n_1	t_1, с	$t_{1\,ср}$, с	T_1, с	n_2	t_2, с	$t_{2\,ср}$, с	T_2, с
1										
2										
3										

Контрольные вопросы

1. Какой маятник называется крутильным баллистическим маятником?

2. Как изменится момент инерции и период колебаний крутильного баллистического маятника, если увеличить массу грузов, не передвигая их? Передвинуть грузы ближе к оси, не изменяя их массы?

3. Что называется моментом импульса материальной точки (твердого тела) относительно неподвижной оси?

4. Как определяется направление вектора момента импульса?

5. Как формулируется закон сохранения момента импульса?

6. Как записывается закон сохранения момента импульса для системы пуля – маятник? Раскройте физический смысл величин, входящих в уравнение.

7. Как формулируется закон сохранения механической энергии?

8. Какие силы называют консервативными? Какие силы называют диссипативными?

9. Как записывается закон сохранения механической энергии для системы маятник – упругая проволока? Раскройте физический смысл величин, входящих в уравнение.

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название и цель лабораторной работы.

2. Теоретические основы использования колебаний крутильного баллистического маятника для определения скорости полета пули.

3. Таблицу с результатами измерений и вычислений.

4. Расчет погрешности измерения скорости полета пули.

5. Вывод по работе.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия момента импульса, энергии, а также законы сохранения импульса и энергии;

– овладел знанием теоретических основ экспериментального определения скорости пули с помощью крутильного баллистического маятника;

– правильно выполнил измерения и расчеты;

– оформил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиями;

– дал исчерпывающие ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.

2. *Детлаф А. А., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.

3. *Трофимова Т. И.* Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 107
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ КАРЕТОК ФЛЕТЧЕРА С ПОМОЩЬЮ УСТРОЙСТВА CASSY

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение коэффициентов восстановления скорости и энергии при центральном ударе двух кареток.

2. ЗАДАЧИ

1. Закрепление теоретических знаний по теме «Законы сохранения в механике».
2. Приобретение навыков проведения физических измерений, умения обработки полученных экспериментальных данных.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Импульс. Энергия. Законы сохранения

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называют **механической системой** (системой). Систему тел, взаимодействующих между собой и не взаимодействующих с телами, не входящими в данную систему, называют **замкнутой**.

Векторную величину, равную произведению массы тела m на его скорость $\vec{\upsilon}$, называют **импульсом тела**

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}\,.$$

Закон сохранения импульса гласит, что при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, суммарный импульс тел системы остается неизменным

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \vec{\upsilon}_i = \text{const}\,.$$

Одной из количественных мер движения и взаимодействия материи является **энергия**. В соответствии с различными формами движения материи выделяют разные виды энергии: механическую, внутреннюю, ядерную и другие. Под полной механической энергией понимают сумму кинетической и потенциальной энергии. **Кинетическая энергия тела** обусловлена его движением и зависит только от массы и скорости тела. Кинетическая энергия тела равна работе, которую способно совершить тело в процессе уменьшения

своей скорости до нуля. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел, входящих в эту систему. **Потенциальная энергия** определяется взаимным расположением тел и их частей и характером взаимодействия между ними.

Согласно **закону сохранения энергии**, полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют лишь консервативные силы, остается постоянной. Силу называют консервативной, если работа, совершаемая этой силой, зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит от траектории, по которой оно двигалось. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такую силу называют диссипативной (или неконсервативной). Если в системе тел действуют **диссипативные силы** (например, силы трения, силы сопротивления), то для таких систем закон сохранения механической энергии не выполняется.

3.2. Соударение тел

В механике под **ударом** (**соударением**) понимают кратковременное взаимодействие двух или более тел, возникающее в результате их соприкосновения. Различают три вида удара: абсолютно упругий, абсолютно неупругий, неупругий удар.

Абсолютно упругим называют удар, при котором механическая энергия не переходит в немеханические виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга, и разлетаются со скоростями, модуль и направление которых определяются законом сохранения импульса и законом сохранения механической энергии. Идеально упругих ударов в природе не существует, так как всегда часть энергии затрачивается на необратимую деформацию тел и увеличение их внутренней энергии. Однако, для некоторых тел, например, стальных шаров, потерями механической энергии можно пренебречь вследствие их малости.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает, кинетическая энергия полностью или частично превращается во внутреннюю энергию тел. Столкнувшиеся тела после удара либо движутся вместе

с одинаковой скоростью, либо покоятся. Примером такого удара служит удар шаров, изготовленных из пластилина. При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения суммарного импульса тел, а закон сохранения механической энергии не выполняется.

При неупругом ударе часть кинетической энергии упругой деформации переходит в кинетическую энергию теплового движения молекул.

В реальности все удары являются либо абсолютно, либо частично неупругими.

3.3. Центральный удар

Рассмотрим две каретки, движущиеся навстречу друг другу со скоростями υ_1 и υ_2 (рис. 1).

Рис. 1. Движение кареток

Если каретки после удара движутся отдельно друг от друга со скоростями $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$, по закону сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2' \ . \qquad (1)$$

Если после удара каретки движутся вместе как одно целое, то закон сохранения импульса запишется как

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}\ , \qquad (2)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость тел после удара.

Различают две характеристики соударения – коэффициент восстановления скорости и коэффициент восстановления энергии.

Коэффициент восстановления скорости K_C определяется как отношение относительной скорости тел после удара к относительной скорости тел до удара

$$K_C = \frac{\upsilon_{отн}'}{\upsilon_{отн}} = \left|\frac{\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_1'}{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}\right|. \qquad (3)$$

Для абсолютно упругого удара $K_C = 1$. При абсолютно неупругом ударе $K_C = 0$. В случае столкновения реальных тел

столкновение не является абсолютно упругим, поэтому $K_С < 1$. Теория и опыт показывают, что коэффициент восстановления скорости не зависит от масс и относительной скорости соударяющихся тел. Он зависит только от материала, из которого изготовлены соударяющиеся тела. При ударе тела о неподвижную преграду (плиту) коэффициент восстановления скорости для тел из дерева $K_С = 1/2$, из стали ~ 5/9, из слоновой кости ~ 8/9, из стекла ~ 15/16.

Коэффициент восстановления энергии $K_Э$ равен отношению кинетической энергии тел после удара к их кинетической энергии до удара

$$K_Э = \frac{\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2^2}. \qquad (4)$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Общий вид установки для исследования столкновения шаров представлен на рис. 2

В состав установки входят: детектор CASSY *1*, тайм-бокс или таймер *2*, трек *3*, 2 тележки *4* с дополнительными грузами, кольцо для столкновений *5*, 2 фотосчетчика *6*, 2 многожильных 6 – контактных кабеля *7*, ПК с установленной программой CASSY Lab

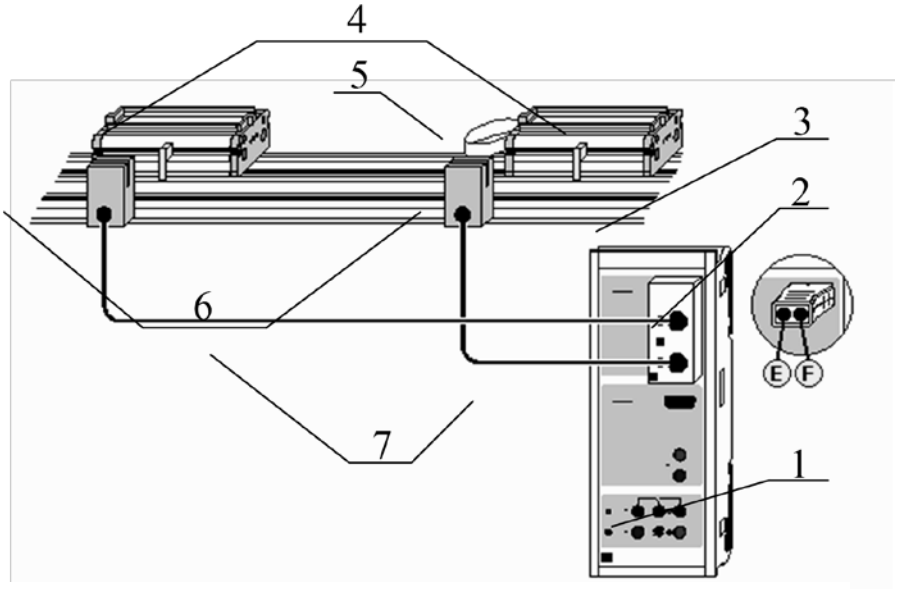

Рис. 2. Установка для изучения соударения тел

Горизонтальное расположение платформы с треком *3*, можно регулировать с помощью опор. К платформе крепятся два фотосчетчика со световыми воротами *6*, которые подключают на входы *E* и *F* тайм-бокса *2*. Световые ворота располагают так, чтобы столкновение тележек (кареток Флетчера) происходило между ними. Флажки на тележках должны пересечь лучи света при прохождении своих ворот (рис. 3), поэтому каретки на треке устанавливают таким образом, чтобы световые ворота были расположены со стороны движения каждой из кареток.

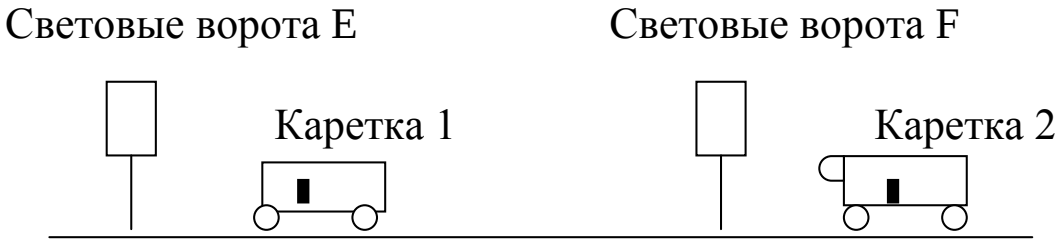

Рис. 3. Расположение световых ворот и кареток

Скорость тележек до и после столкновения измеряют по времени затемнения на обоих световых воротах. Всего в работе может быть реализовано 3 различных варианта первоначального расположения кареток:

– обе тележки за воротами;

– левая тележка между воротами, правая за воротами;

– правая тележка между воротами, левая за воротами.

5. ТРЕБОВАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

1. Прежде чем приступить к работе, внимательно ознакомьтесь с заданием и лабораторной установкой.

2. Проверьте заземление лабораторной установки (компьютера) и изоляцию токоведущих проводов. Немедленно сообщите преподавателю или лаборанту о замеченных неисправностях.

3. Не оставляйте без присмотра лабораторную установку.

4. По окончании работы приведите в порядок свое рабочее место, отключите компьютер.

6. ЗАДАНИЕ

Определение коэффициента восстановления скорости и коэффициента восстановления энергии при центральном ударе кареток.

7. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1. Расположить каретки на треке. Для упругого удара на каретке 2 установить кольцо (для неупругого удара – кольцо снять). Включить компьютер. Выполнить команду «ПУСК», затем «CASSY Lab». Нажать «?» или F1. Появится окно «CASSY Lab». Нажать «Примеры экспериментов».

2. При появлении надписи «Experiment examples» нажать «Physics». При появлении надписи «Experiment examples physics» нажать «Conservation of momentum and energy (collision)». Появится надпись «Conservation of momentum and energy (collision)». Найти пункт «Carrying out the experiment» и нажать кнопку «Load settings» слева от надписи.

3. Ввести массы m_1 и m_2 (выбрать $m_1 \neq m_2$, по указанию преподавателя). Для установки массы m_1 навести курсор в поле ввода на m_1, щелкнуть правой кнопкой мыши и в появившемся окне ввести числовое значение параметра (в кг). Масса каретки без груза равна 400 г. Нажать кнопку «Закрыть». Аналогично ввести числовое значение массы m_2.

4. Настроить один из параметров измерений до столкновения по отношению к воротам E и F (υ_1, υ_2, υ_1' или υ_2'). Для этого навести курсор на одно из окон υ_1, υ_2, υ_1' или υ_2' в поле ввода и нажать 1 раз правой кнопкой мыши. Появится окно «Установки измерительного канала». Выбрать в нем вариант движения тел:

– тела движутся навстречу;

– тело 1 покоится;

– тело 2 покоится.

5. Выполнить команду $\rightarrow 0 \leftarrow$. Провести эксперимент (привести обе каретки или одну из них в движение). На экране в окнах скоростей υ_1, υ_2, υ_1' или υ_2' появятся их измеренные значения.

6. Если необходимо повторить измерения, то для этого нажать «Конец столкновения», затем $\rightarrow 0 \leftarrow$. Закрыть окно «Установки измерительного канала».

7. Нажать клавишу F9 – снятие и запись результата. Программа вычислит импульсы и энергии тел.

8. Для просмотра числовых значений импульсов тел до и после столкновения необходимо нажать в главном окне «Impuls» (высвечиваются окна с параметрами p_1 и p_2 – импульсы первой

и второй каретки до удара, p_1' и p_2' – импульсы кареток после удара, p и p' – импульсы системы до и после соударения). Результаты измерений занести в табл. 1.

9. Для просмотра числовых значений энергии нажать в главном окне «Energie» (высвечиваются окна с параметрами E_1 и E_2 – энергии кареток до соударения, E_1' и E_2' – энергии после соударения, E и E' – энергии системы до и после удара, ΔE – потеря энергии при ударе). Результаты измерений занести в табл. 1.

11. Для просмотра числовых значений импульсов соударяющихся тел до и после удара можно также выбрать закладку «Gesamtimpuls», просмотра значений энергии тел до и после удара – закладку «Gesamtenergie», потери энергии при ударе – закладку «Energieverlust».

12. Рассчитать коэффициенты восстановления скорости и энергии. Полученные результаты внести в табл. 1.

Таблица 1

m_1, кг	m_2, кг	υ_1, м/с	υ_2, м/с	υ_1', м/с	υ_2', м/с	p, кг·м/с	p', кг·м/с	$K_С$	E, Дж	E', Дж	$K_Э$

13. Проанализировать полученные результаты. Сделать заключение о выполнении или невыполнении законов сохранения импульса и энергии при соударениях тел.

14. Провести эксперимент для упругого удара при трех указанных выше вариантах движения тел по п. 4–13.

15. Снять кольцо с каретки 2 и провести эксперимент для неупругого удара. Рассмотреть три варианта движения тел:

– тела движутся навстречу;

– тело 1 покоится;

– тело 2 покоится.

В табл. 2 занести результаты измерений и рассчитанные значения коэффициентов восстановления скорости и энергии.

16. Закрыть окна настройки. Закрыть программу, нажав × в правом верхнем углу монитора. При предложении сохранить измерение, выбрать «НЕТ», компьютер закроет программу.

Таблица 2

m_1, кг	m_2, кг	υ_1, м/с	υ_2, м/с	υ, м/с	p, кг·м/с	p', кг·м/с	$K_С$	E, Дж	E', Дж	$K_Э$

Контрольные вопросы

1. Что понимают под импульсом тела?
2. Что такое энергия? Какие виды энергии вы знаете?
3. Что называют кинетической энергией тела?
4. Как формулируются законы сохранения импульса и энергии?
5. Что такое удар? Какой удар называют абсолютно упругим (неупругим)?
6. Какие законы сохранения можно использовать при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударе?
7. Что понимают под коэффициентом восстановления скорости?
8. Что понимают под коэффициентом восстановления энергии?
9. Что представляет собой экспериментальная установка для изучения законов соударения тел и как с ее помощью определяют коэффициенты восстановления скорости и энергии?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Название, номер и цель лабораторной работы.
2. Краткую теорию и основные формулы для выполнения расчетов.
3. Таблицы с результатами измерений и вычислений.
4. Выводы по результатам работы (обобщение того, что сделано в работе, заключение о выполнении или нарушении законов сохранения, предложения по усовершенствованию лабораторной установки и по проведению работы).

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– усвоил понятия механическая система, импульс, механическая энергия, соударение, формулирует законы сохранения импульса и энергии и приводит примеры их практического использования;

– умеет рассчитывать коэффициенты восстановления скорости и энергии при соударении;

– решает типовые задачи с использованием законов сохранения импульса и энергии;

– правильно выполнил экспериментальную и расчетную части работы;

– составил отчет в соответствии с предъявляемыми требованиям;

– сформулировал выводы по проделанной работе;

– дал полные ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. – СПб.: Издательство «Лань», 2018.
2. *Детлаф А. Н., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Academia, 2015.
3. *Трофимова Т. И*. Курс физики. – М.: Академия, 2016.

Лабораторная работа № 108
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение движения тела брошенного под углом к горизонту в вязкой среде в неинерциальной системе отсчета в виртуальной среде «Ballistica».

2. ЗАДАЧИ

1. Получение углубленных теоретических знаний о степени влияния сил различной природы на характер движения тел в атмосфере.
2. Интерактивное моделирование движения бейсбольного мяча и снаряда и анализ результатов.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

На выброшенное под углом к горизонту и с определенной скоростью тело действует сила тяжести и комплекс аэродинамических сил и моментов. В данной работе изучается движение бейсбольного мяча и снаряда.

Рассмотрение движения тела начнем с действия на него силы тяжести. Запишем уравнение динамики в векторном виде

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \cdot \vec{g}\,, \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала системы координат в точку, определяющую положение тела в пространстве; m – масса тела; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

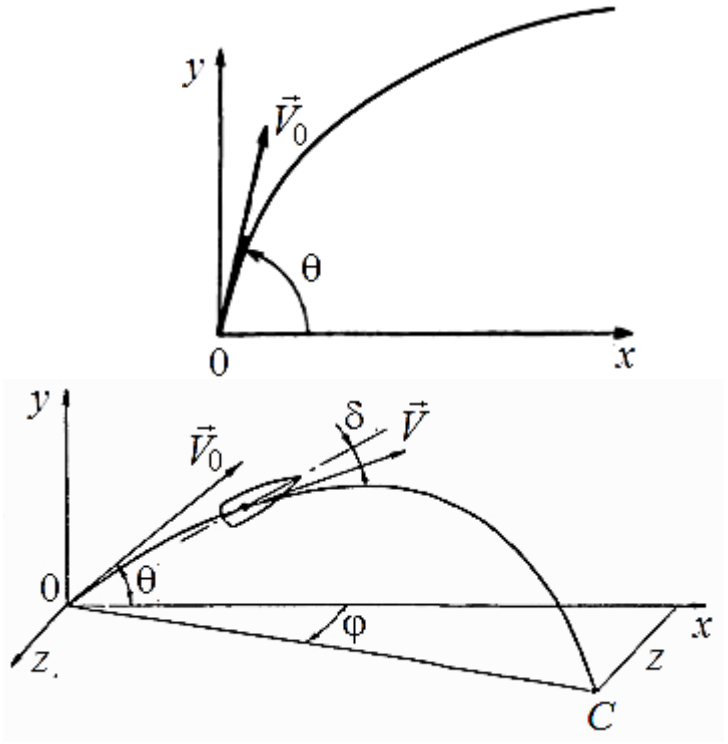

Рис. 1. Стартовая система координат: *а* – на плоскости; *б* – в пространстве [1]

Введем систему координат (рис. 1). Ее начало совместим с начальным положением бросаемого тела, ось *x* направим горизонтально в сторону движения мяча, ось *y* вертикально вверх. Решением уравнения (1) в данной системе координат будет иметь вид хорошо известный из курса школьной физики (2).

$$\begin{cases} x = t \cdot V_0 \cdot \cos(\theta) \\ y = t \cdot V_0 \cdot \sin(\theta) - \dfrac{g \cdot t^2}{2}. \\ z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

На всякое тело, движущееся в воздухе, действует сила сопротивления воздуха (рис. 2). Ньютоном было установлено, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости движения тела, площади его поперечного сечения и плотности воздуха (сейчас известно, что квадратичный закон сопротивления справедлив для дозвуковых скоростей). Силу сопротивления можно разложить на две составляющие: параллельную и перпендикулярную скорости движения тела.

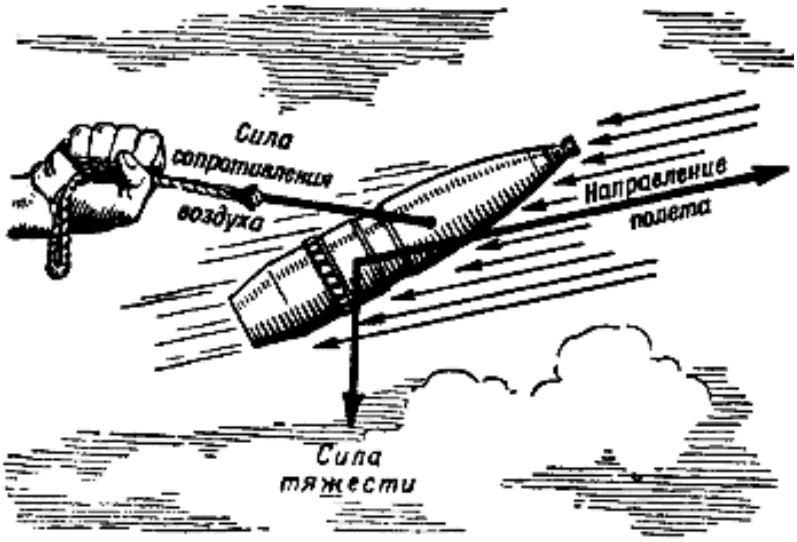

Рис. 2. Сила сопротивления воздуха [2]

Перпендикулярная составляющая силы сопротивления возникает только при наличии асимметрии тела по отношению к направлению движения (подъемная сила), а также из-за неодинаковой скорости воздушного потока, по разные стороны тела, вызванные его вращением (эффект Магнуса). Для мяча, форма которого близка к сферической, подъемная сила мала, и ею можно пренебречь.

Параллельная составляющая силы сопротивления возникает всегда. Она направлена в сторону противоположную движению, и стремится затормозить тело. Ее называют лобовым сопротивлением $\vec{F}_d$

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot C_d\cdot v\cdot\vec{v}, \qquad (3)$$

где ρ – плотность воздуха; S – площадь поперечного сечения; C_d – коэффициент лобового сопротивления; $\vec{v}=\vec{V}-\vec{W}$ – вектор скорости относительно воздуха, где $\vec{V}$ – скорость тела относительно Земли; $\vec{W}$ – скорость ветра.

Поскольку Земля в силу суточного вращения является неинерциальной системой отсчета, необходимо учесть силы инерции. На движущееся тело будет действовать сила Кориолиса

$$\vec{F}_C = 2\cdot m\cdot(\vec{V}\times\vec{\Omega}), \qquad (4)$$

где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения Земли.

$$\Omega = 2\pi/((23\cdot 60+56)\cdot 60+4) = 7,292\cdot 10^{-5}\ \text{рад/сек}.$$

Поскольку сила Кориолиса определяется векторным произведением скорости тела на вектор угловой скорости необходимо задавать широту местности (φ) и азимут (*A*) (рис. 3). Действие силы Кориолиса на свободно падающее тело изображено на рис. 4.

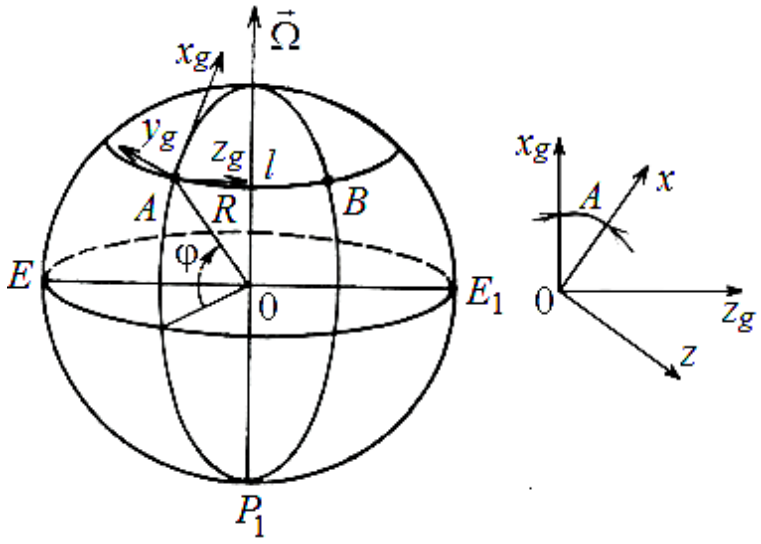

Рис. 3. Система координат связанная с Землей

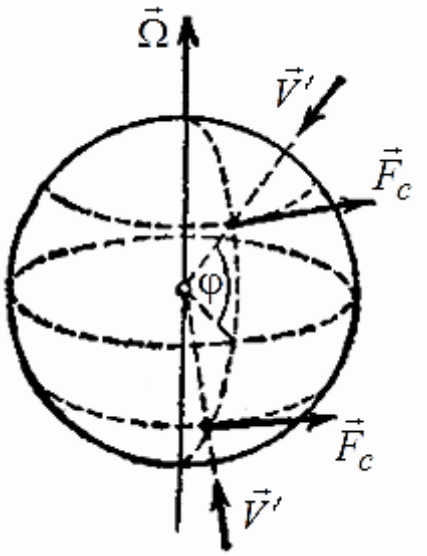

Рис. 4. Действие силы Кориолиса

Учтем также, что ускорение свободного падения у поверхности Земли зависит от широты местности: $g_0 = 9,78034 \cdot (1 + 0,00528 \cdot \sin^2 \varphi)$.

Уравнение динамики с учетом силы тяжести, силы сопротивления и силы Кориолиса запишется

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_a + \vec{F}_T + \vec{F}_c. \qquad (5)$$

Полученное уравнение (5) в общем виде не имеет решения (аналитические формулы имеются только для частных случаев: падение тела с высоты строго вниз, или бросание тела с очень не большим углом), для его решения необходимо воспользоваться численными методами решения дифференциальных уравнений.

Аэродинамические силы, действующие на снаряд в полете

На ранних этапах развития артиллерии, скорость снарядов была невысокая и сферическая форма снаряда, была оптимальной (практична и технологична). Для артиллерии главной задачей была и остается дальность стрельбы, ее увеличивали всеми возможными способами, особо остро этот вопрос встал при увеличении скоростей до близких к скорости звука. Для того чтобы уменьшить силу сопротивления воздуха $\vec{F}_d$, необходимо уменьшить коэффициент лобового сопротивления C_d который сильно зависит от формы снаряда (рис. 5). Следовательно, надо менять форму снаряда, для эффективного преодоления звукового барьера нужен продолговатый снаряд с заостренной кромкой, которая будет эффективно рассекать набегающий воздушный поток.

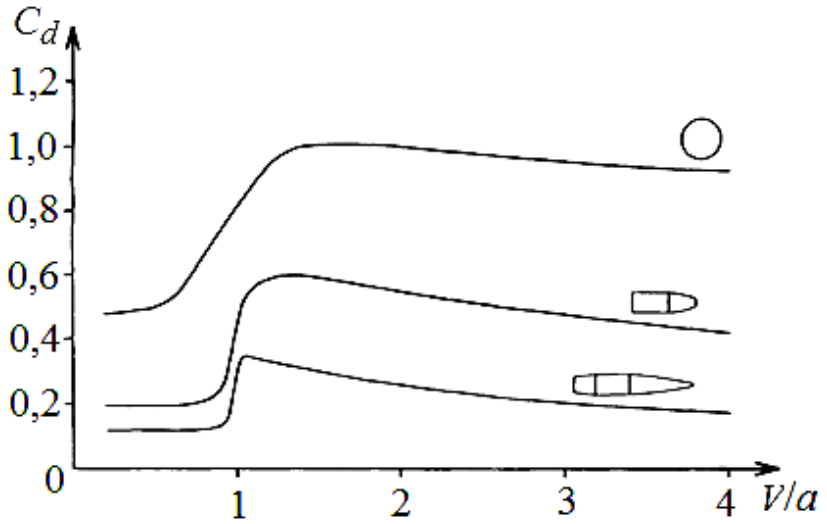

Рис. 5. Значения коэффициента лобового сопротивления для снарядов различной формы [3] (где a = 340 м/с – скорость звука)

Но возникает новое затруднение: в продолговатом снаряде центр масс (ЦМ) не совпадает с центром приложения аэродинамических сил (ЦД) (рис. 6), в результате чего возникает момент, который стремится опрокинуть снаряд. Снаряд в определенный

момент своего полета подставит набегающему потоку свою боковую поверхность, в результате чего коэффициент лобового сопротивления увеличится в разы, и потеряет большое количество кинетической энергии, полет такого снаряда будет не стабилен (рис. 7).

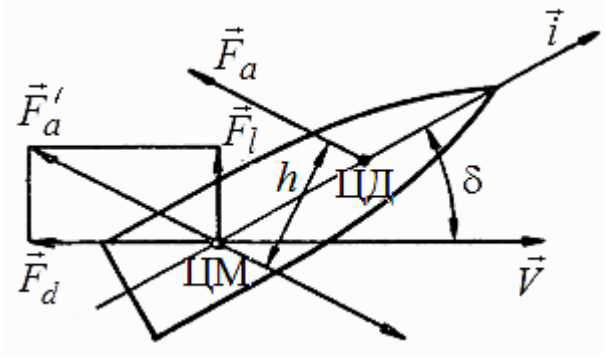

Рис. 6. Аэродинамические силы, действующие на снаряд [1]

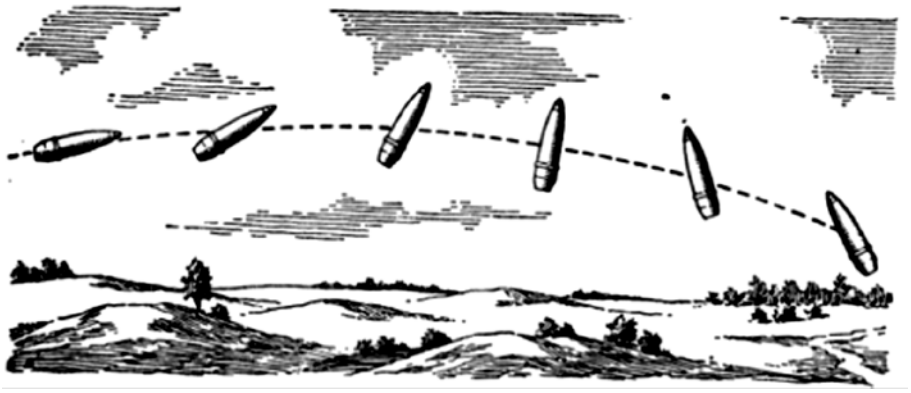

Рис. 7. Полет нестабилизированного снаряда [2]

Стабилизировать полет продолговатого снаряда можно двумя способами: придать снаряду вращение или сделать снаряд оперенным. Остановимся на разборе первого случая (второй характерен для ракет). Снаряду начали придавать вращение, тем самым используя свойство гироскопа сопротивляться всяким попыткам изменить положение его оси. Современные снаряды совершают от 12000 до 30000 оборотов в минуту, а пули более 60000 оборотов в минуту. Гироскоп «сопротивляется» изменению положения своей оси, но все-таки, он под действием внешних сил отклоняет свою главную ось, смещение происходит по направлению к моменту создаваемой этой силой. Если сказать проще то гироскоп поворачивается в сторону, куда должна прийти через 3/4 оборота точка получившая толчок, при условии что толчок происходил по нормали к его оси (рис. 8). Представим что в начальный момент,

вылетев из ствола орудия, наш снаряд имеет небольшой угол возвышения. Набегающий на него поток воздуха будет «толкать» снаряд снизу вверх, в результате чего ось снаряда отклонится вправо, теперь уже набегающий поток действует слева направо и снаряд отклонит свою ось вниз, затем влево и вверх, тем самым снаряд описывает своим острием коническую поверхность (рис. 9).

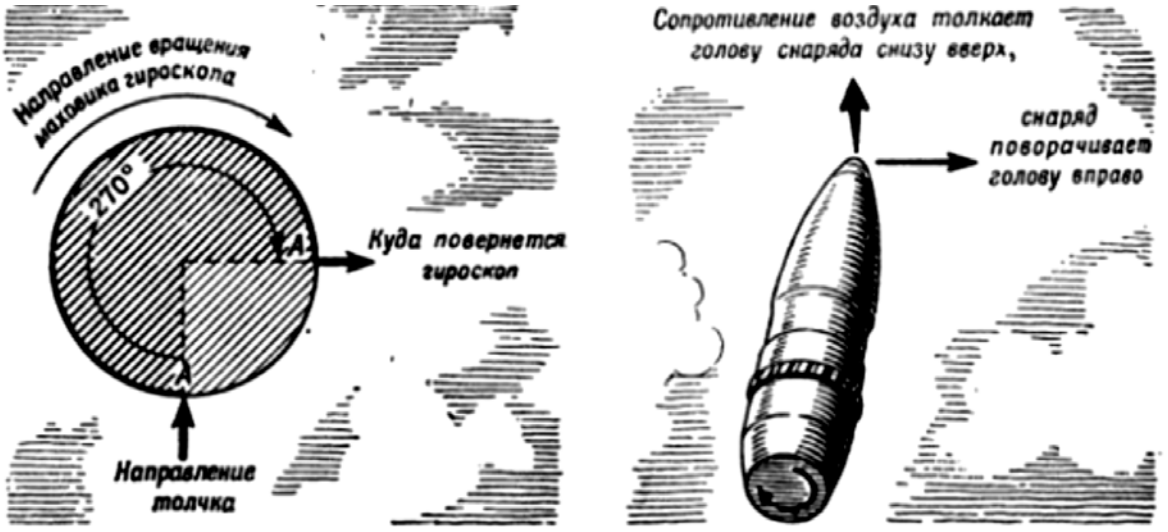

Рис. 8. Действие сопротивления воздуха на снаряд [2]

Зададимся вопросом, а одинаково ли сопротивление воздуха испытывают все части боковой поверхности летящего снаряда? На первый взгляд может показаться, что одинаковое он ведь последовательно поворачивается вправо, вниз, влево, вверх, но не надо забывать, что на снаряд постоянно действует сила тяжести. Снаряд «давит» на воздух, а воздух по третьему закону Ньютона отвечает ему тем же, мы имеем постоянную силу, которая действует на снаряд снизу вверх, и как мы только что, определили, наш снаряд должен отклоняться вправо при вращении снаряда по часовой стрелке (если смотреть со стороны дна снаряда). Этот эффект называется *деривацией*, который заключается в том что снаряды выпущенные из ствола с правыми нарезами отклоняется вправо от линии бросания, а снаряды выпущенные из орудия с левыми нарезами отклоняется влево от линии бросания.

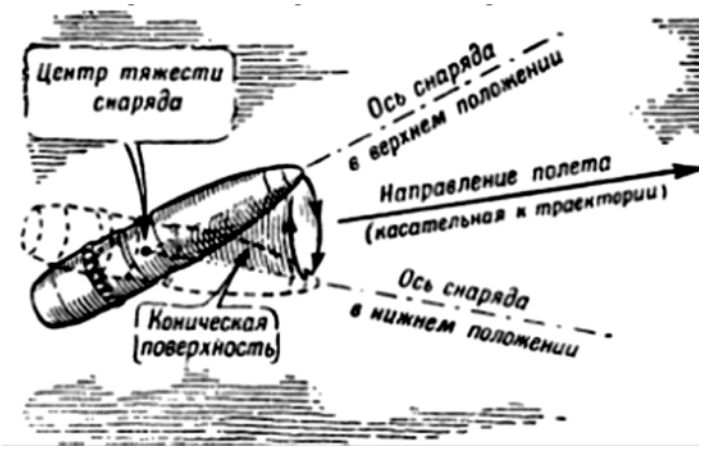

Рис. 9. Коническое вращение головной части снаряда [2]

Мы видим, что вращающийся снаряд, описывая коническую поверхность, постоянно образует угол с вектором скорости (угол атаки) из-за чего возникает вертикальная составляющая сопротивления воздуха – *подъемная сила* $\vec{F}_l$ (см. рис. 6). Для ее учета, нам необходимо знать какой угол образует главная ось снаряда с вектором скорости.

В общем случае движение снаряда можно разделить на три составляющие:

1) поступательное движение центра масс;
2) вращение снаряда вокруг собственной оси;
3) движение снаряда около центра масс.

1. Поступательное движение цента масс

Уравнение движения центра масс запишется

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_a + \vec{F}_T + \vec{F}_c, \qquad (6)$$

где $\vec{F}_a$ – комплекс аэродинамических сил; $\vec{F}_T$ – сила тяжести; $\vec{F}_c$ – сила Кориолиса.

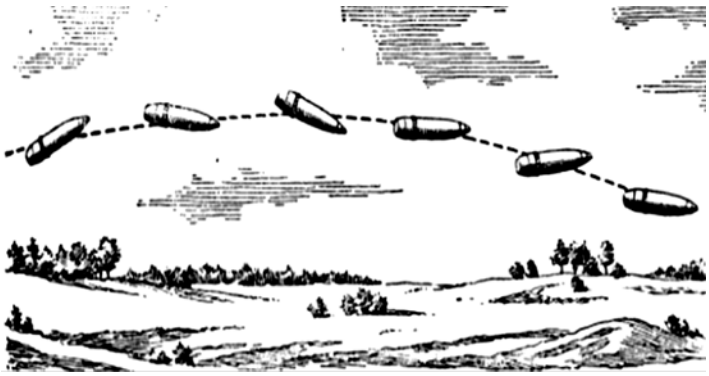

Рис. 10. Полет стабилизированного вращением снаряда [2]

Особое место занимаю аэродинамические силы, их действие в основном направленно на уменьшение скорости полета. Мы ограничимся тремя из них, оказывающих наибольшее влияние на полет тела: сила сопротивления $\vec{F}_d$, подъемная сила $\vec{F}_l$, сила Магнуса $\vec{F}_m$

$$\vec{F}_a = \vec{F}_d + \vec{F}_l + \vec{F}_m. \qquad (7)$$

При отклонении снаряда на угол δ (см рис. 6) в плоскости сопротивления возникает подъемная сила $\vec{F}_l$, величина которой зависит от угла, калибра и длины снаряда. Поскольку в общем случае ось снаряда не совпадает с вектором скорости по направлению, то имеется поперечная составляющая скорости потока, которая, складываясь со скоростью циркулирующего потока, создает с одной стороны снаряда область повышенного давления с другой – пониженного. В результате возникает сила Магнуса $\vec{F}_m$ (рис. 11).

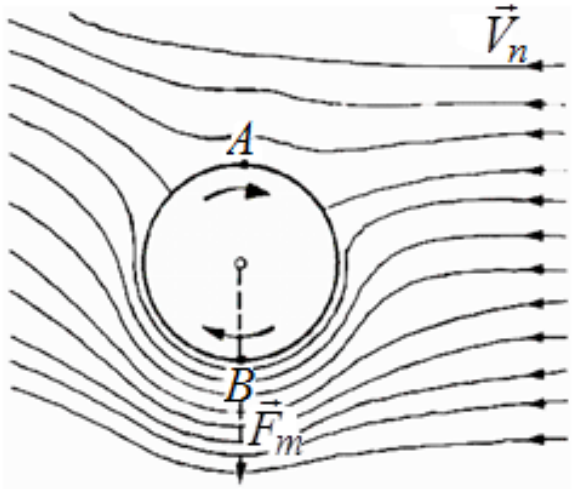

Рис. 11. Схема возникновения силы Магнуса

Подъемная сила $\vec{F}_l$, сила Магнуса $\vec{F}_m$ [2] определяются следующими выражениями:

$$\vec{F}_l = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_l \cdot (\vec{v} \times (\vec{i} \times \vec{v})), \tag{8}$$

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v \cdot \left(\frac{\omega \cdot d}{v} \right) \cdot C_m \cdot \left(\vec{v} \times \vec{i} \right), \tag{9}$$

где ρ – плотность атмосферы; S – поперечное сечение снаряда; $\vec{v}$ – вектор скорости снаряда (относительно воздуха); $\vec{i}$ – единичный вектор, связанный с главной осью снаряда; C_d, C_l, C_m – коэффициенты соответствующих сил; d – калибр снаряда.

Все аэродинамические силы зависят от плотности воздуха. Атмосферу разделяют на пять основных слоев, мы ограничимся самой нижней – тропосфера (границы которой простирается до высоты 11000 м в средних широтах, а в экваториальных широтах

до 16000 м), отличительная черта тропосферы – понижение температуры воздуха с увеличением высоты.

Плотность воздуха зависит от температуры [1]

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{T_0 + \alpha}{T} \right)^{-1-\frac{1}{R \cdot \alpha}}, \tag{10}$$

где ρ_0 – плотность воздуха в начальной точке; T_0 – температура в начальной точке; α – градиент температуры; R – универсальная газовая постоянная.

2. Вращение снаряда вокруг собственной оси

Вращательное движение происходит под действием моментов всех выше перечисленных сил: момент поверхностного сопротивления воздуха $\vec{M}_s$ (11), опрокидывающий момент $\vec{M}_o$(12), момент Магнуса $\vec{M}_m$ (13) [3]:

$$\vec{M}_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot d \cdot \left(\frac{\omega \cdot d}{v} \right) \cdot C_s \cdot \vec{i}, \tag{11}$$

$$\vec{M}_o = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot d \cdot v \cdot C_o \cdot (\vec{v} \times \vec{i}), \tag{12}$$

$$\vec{M}_m = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v \cdot S \cdot d \cdot \left(\frac{\omega \cdot d}{v} \right) \cdot C_{Mm} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{i} \right), \tag{13}$$

где C_s, C_o, C_{Mm} – коэффициенты соответствующих моментов; $\vec{i}$ – единичный вектор, связанный с главной осью снаряда.

Необходимо заметить, что все коэффициенты сил и моментов для снаряда, сами являются сложными зависимостями.

Итоговое уравнение динамики для вращательного движения снаряда [3]

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_s + \vec{M}_o + \vec{M}_m, \tag{14}$$

где $\vec{L}$ – момент импульса снаряда.

3. Движение снаряда около центра масс

Движение снаряда около центра масс выражается уравнением определяющим положение единичного вектора $\vec{i}$ связанного с главной осью снаряда (рис. 6). Снаряд рассматривается с точки

зрения прецессионной теории гироскопа. Момент импульса мы можем представить в виде [3]

$$\vec{L} = I_p \cdot \omega \cdot \vec{i} + I_t \cdot (\vec{i} \times \frac{d\vec{i}}{dt}), \tag{15}$$

где I_p – полярный момент инерции снаряда; I_t – экваториальный момент инерции снаряда.

Уравнение движения снаряда около центра масс имеет вид [3]

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{\vec{L} \times \vec{i}}{I_t}. \tag{16}$$

Математическая модель, описывающая движение снаряда в общем виде будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_d + \vec{F}_l + \vec{F}_m + \vec{F}_T + \vec{F}_c \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_s + \vec{M}_o + \vec{M}_m \\ \dfrac{d\vec{i}}{dt} = \dfrac{\vec{L} \times \vec{i}}{I_t}. \end{cases} \tag{17}$$

Движение бейсбольного мяча

В случае бейсбольного мяча можно ограничиться только рассмотрением поступательного движения (рис. 12), так как мяч полностью симметричен и центр масс совпадает с центром действия аэродинамических сил, следовательно, отсутствует подъемная сила, силу Магнуса выразим следующим образом

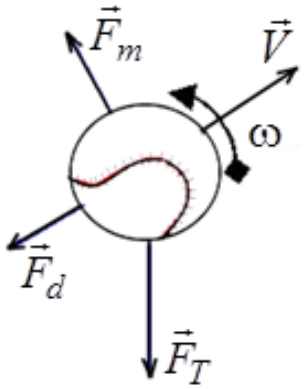

Рис. 12. Силы, приложенные к бейсбольному мячу

$$\vec{F}_{m'} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C'_m \cdot v \cdot \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v})}{\omega}. \tag{18}$$

Закон динамики для движения бейсбольного мяча [4]

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_d + \vec{F}_l + \vec{F}_{m'} + \vec{F}_T + \vec{F}_c . \qquad (19)$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание программы

Программа представляет собой Windows приложение, написанное на языке C# (рис. 13). Программа написана студентом Мазитовым Вадимом Айратовичем специальности МРТ факультета ИАТМ.

Численное решение системы уравнений (17) производится с помощью метода решения дифференциальных уравнений Рунге–Кутта четвертого порядка. Интерфейс программы позволяет задавать широкий набор начальных условий и возможность учета различных сил, действующих на тело – бейсбольный мяч или снаряд (рис. 14). Набор графических средств программного комплекса позволяет наглядно визуализировать результаты расчетов: построить траекторию тела, вывести в табличном виде динамические характеристики тела: скорость, ускорение, дальность полета, максимальную высоту подъема, величину деривации (отклонение по оси z).

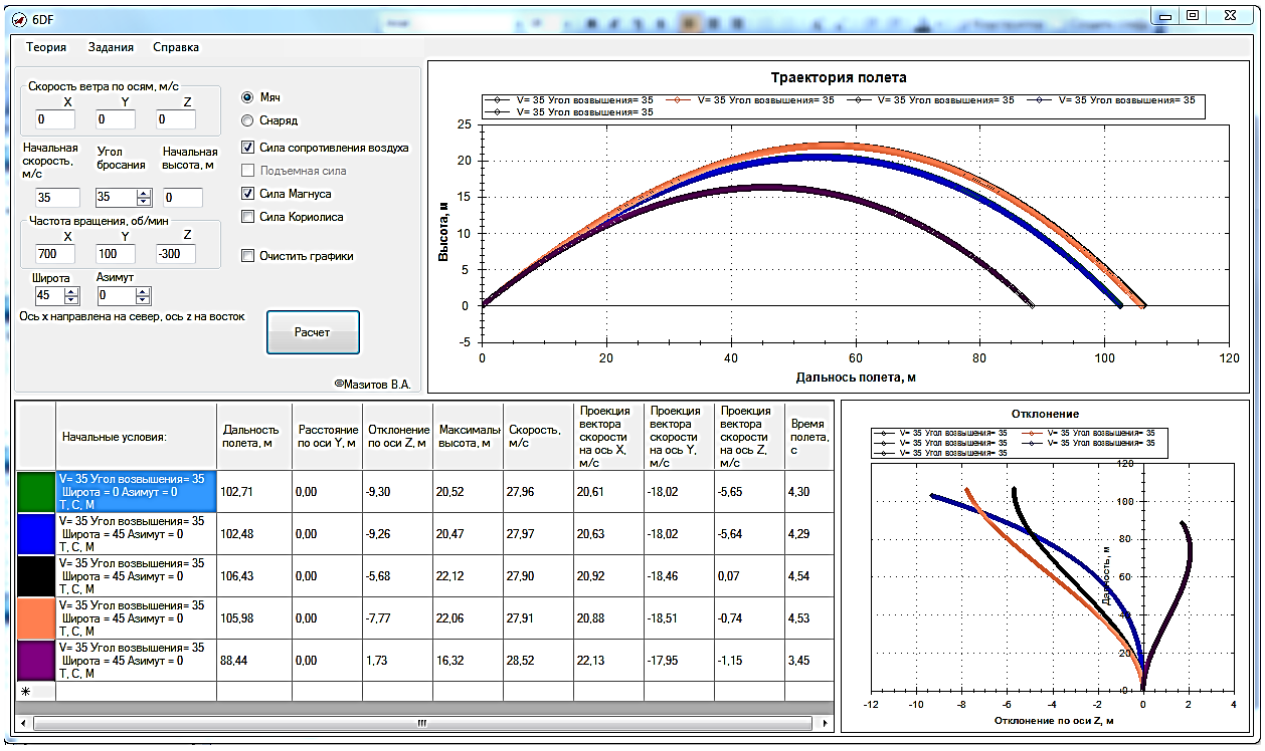

Рис. 13. Основное окно программы

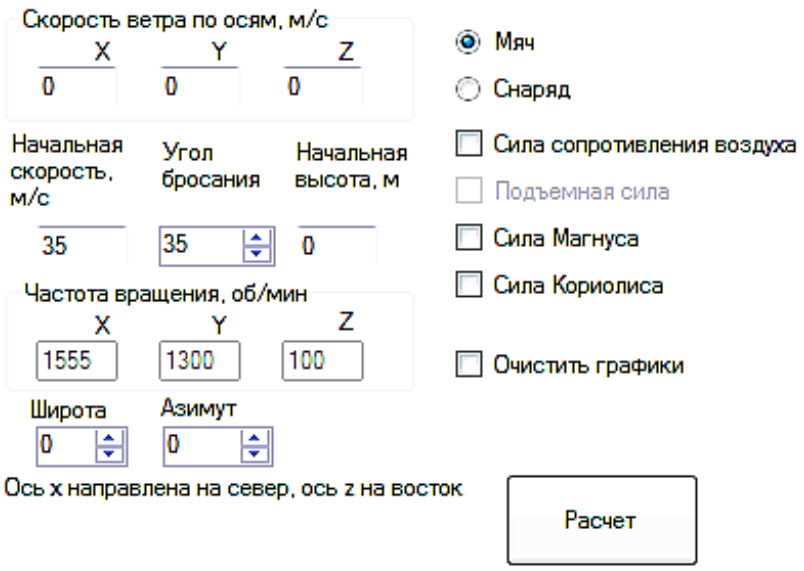

Рис. 14. Блок начальных условий

В качестве снаряда выбран снаряд Denel Assegai 2000 [5], орудие Denel G6-45, калибр 155 миллиметров, вес снаряда 43,7 кг, начальная скорость 915 м/с, начальная частота вращения 17700 об/мин (рис.15).

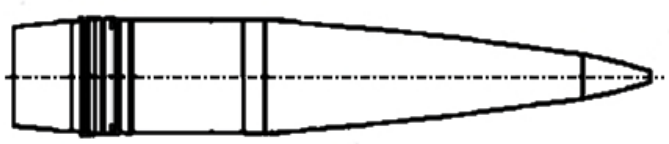

Рис. 15. Снаряд Denel Assegai 2000

Обозначения:
A – угол азимута
φ – широта местности
δ – угол атаки
θ – угол броска

Задание начальных условий

1. Выбрать объект бросания: мяч или снаряд.
2. Задать угол бросания (θ), начальную скорость, начальную высоту.
3. Задать по желанию скорость ветра по различным направлениям.
4. Частоту вращения можно задавать для бейсбольного мяча.

5. Задать широту местности (φ), угол азимута (*A*). Широта местности (φ) откладывается от экватора (φ = 0º), северное полушарие со знаком плюс, южное полушарие со знаком минус. Положительное направление угла азимута (*A*), по часовой стрелки, отрицательное – против. В глобальной системе координат ось *x* направлена строго на север.

6. Исследование движения тела производится выбором действующих на тело сил.

7. Произвести расчет.

8. Проанализировать полученные результаты.

5. ЗАДАНИЯ

1. Зависимость дальности полета от угла бросания мяча.
2. Движение тела с учетом сопротивления воздуха.
3. Изучение влияния ветра на траекторию полета.
4. Исследование движения тела в неинерциальной системе отсчета Земля.
5. Исследование движения снаряда в зависимости от действующих сил.

6. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Выбрать задания по указанию преподавателя

Задание 1. Зависимость дальности полета от угла бросания мяча

Установите опытным путем угол (θ), при котором дальность полета мяча максимальная, без учета сопротивления воздуха. Начальная скорость во всех запусках должна быть одна, вы изменяете только угол (с шагом 5º) бросания.

Исследуйте влияние сопротивления воздуха и проверьте, является ли найденный угол справедливым теперь.

Задание 2. Движение тела с учетом сопротивления воздуха

Изучите влияние сопротивления воздуха на дальность полета в зависимости от начальной скорости. Установите угол (θ) соответствующий максимальной дальности полета без учета сопротивления воздуха, изменяя начальную скорость от 5 до 45 м/с (без учета и с учетом силы сопротивления воздуха) исследуйте влияния этих параметров на траектории полета.

Задание 3. Изучение влияния ветра на траекторию полета

Для одного значения начальной скорости и угла бросания (θ), устанавливайте разные значения ветра и рассмотрите, как меняется траектория полета (значения вводите от –30 до +30).

Задание 4. Исследование движения тела в неинерциальной системе отсчета Земля

Исследуйте движение тела (на выбор: мяч или снаряд) на экваторе (φ = 0º) под действием силы Кориолиса. Установите угол броска 45º градусов, для мяча установите максимально допустимую скорость 45 м/с. Изменяя угол азимута (*A*) (направление бросания на север 0º, на юг ±180º, на восток 90º, на запад –90º) сделайте вывод об изменении дальности полета, и отклонении тела от линии бросания (*z*). Сила Кориолиса, действующая на тело движущегося вдоль меридиана в любом направлении (на север или на юг), направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево в южном полушарии. Предлагаем убедиться в этом: задайте угол азимута $A = 0^{\circ}$, а широту $\varphi = 45^{\circ}$ градусов (северное полушарие) и произведите запуск, установите широту $\varphi = -45^{\circ}$ градусов (южное полушарие), определите величину и направление отклонения по оси *Z*.

Задание 5. Исследование движения снаряда в зависимости от действующих сил

Исследуйте движение снаряда, последовательно включая силы (сила сопротивления, подъемная сила, сила Магнуса, сила Кориолиса) ознакомьтесь с тем, как они влияют на траекторию его движения.

Контрольные вопросы

1. Запишите закон динамики для случая действия только силы тяжести на тело, уравнения кинематики для скорости и координат тела.
2. От чего зависит сила сопротивления?
3. С чем связано действие силы Кориолиса?
4. Какие силы входят в комплекс аэродинамических сил? Запишите закон динамики для бейсбольного мяча.
5. Как можно представить движение снаряда?

Требования к содержанию и оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Номер, название лабораторной работы и цель работы.
2. Краткие основные теоретические положения и расчётные формулы.
3. В экспериментальной части – оформление выполненных заданий.
4. Выводы по результатам работы.

Критерии результативности выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа считается выполненной, если студент:

– правильно выполнил работу и проанализировал полученные результаты;

– составил отчет, соответствующий предъявляемым к нему требованиям;

– сформулировал выводы о проделанной работе;

– подготовил ответы на все контрольные вопросы.

Список литературы

1. *Коновалов А. А.,* Николаев А. А. Внешняя баллистика. – М.: ЦНИИ информации, 1979.
2. *Чистяков М. Н.* Артиллерия. – М.: Военное издательство Министерства Обороны Союза ССР, 1953.
3. *McCoy Robert L.* Modern Exterior Ballistics. – Atglen: Schiffer Millitary History, 2012.
4. *Nathan Alan M.* The effect of spin on the flight of a baseball // Am. J. Phys. – No. 76. – 2008.
5. *Baranowski L.* Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters // Bulletin of Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. – Vol. 61. – No. 2. – 2013.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Перечень методических указаний по лабораторным работам по теме «Механика. Механические колебания и волны»

1. Изучение закона сохранения энергии с помощью маятника Максвелла: методические указания к лабораторной работе № 13 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л. В. Рабчук. – Уфа: УГАТУ, 2013. – 14 с.
2. Изучение законов вращательного движения твердого тела: методические указания к лабораторной работе № 3 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л. В. Рабчук. – Уфа: УГАТУ, 2015. – 6 с.
3. Изучение законов поступательного движения твердого тела: методические указания к лабораторной работе № 6 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. М. Т. Хатмуллина. – Уфа: УГАТУ, 2016. – 16 с.
4. Изучение законов соударения тел: методические указания к лабораторной работе № 4 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л. В. Рабчук, В. С. Осипов. – Уфа: УГАТУ, 2015. – 17 с.
5. Изучение законов сохранения импульса и энергии при столкновениях кареток Флетчера с помощью устройства CASSY: методические указания к лабораторной работе № 107 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л. В. Рабчук. Уфа: УГАТУ, 2009. – 12 с.
6. Изучение колебаний пружинного маятника: методические указания к лабораторной работе № 10 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л.В. Рабчук. Уфа: УГАТУ, 2013. – 16 с.
7. Изучение собственных колебаний струны тела: методические указания к лабораторной работе № 11 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. М.Т. Хатмуллина. Уфа: УГАТУ, 2016. – 13 с.
8. Моделирование движения тела в вязкой среде в неинерциальной системе отсчета: методические указания к лабораторной работе № 108 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост.: М. Т. Хатмуллина, В. А. Мазитов. Уфа: УГАТУ, 2016. – 16 с.
9. Определение момента инерции диска относительно оси и проверка теоремы Штейнера: методические указания к лабораторной работе

№ 101 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л.В. Рабчук. Уфа: УГАТУ, 2015. – 11 с.

10. Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний: методические указания к лабораторной работе № 4 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л.В. Рабчук. Уфа: УГАТУ, 2013. – 13 с.
11. Определение моментов инерции твердых тел методом трифилярного подвеса: методические указания к лабораторной работе № 1 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л.В. Рабчук. Уфа: УГАТУ, 2015. – 15 с.
12. Определение моментов инерции тел произвольной формы: методические указания к лабораторной работе № 5 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Э.В. Сагитова. Уфа: УГАТУ, 2016. – 14 с.
13. Определение скорости звука в воздухе: Методические указания к лабораторной работе № 8 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. М.Т. Хатмуллина. Уфа: УГАТУ, 2018. – 16 с.
14. Определение скорости полета пули с помощью крутильного баллистического маятника: методические указания к лабораторной работе № 2 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л. В. Рабчук. Уфа: УГАТУ, 2016, 14 с.
15. Определение скорости полета пули с помощью унифилярного подвеса: методические указания к лабораторной работе № 102 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. Л. В. Рабчук. – Уфа: УГАТУ, 2017. 17 с.
16. Определение ускорения свободного падения: методические указания к лабораторной работе № 12 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост.: Э. В. Сагитова, А. Г. Ряхова. Уфа: УГАТУ, 2010 – 15 с.
17. Определение ускорения свободного падения с помощью физического и математического маятников: Методические указания к лабораторной работе № 9 по дисциплине «Физика» / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; сост. М.Т. Хатмуллина. Уфа: УГАТУ, 2010. – 13 с.