Белогрудов Александр Николаевич

УГАТУ

доцент кафедры специальных глав математики

Решение задач по теории вероятностей

2018г.

Типы рассматриваемых задач:

- формула классической вероятности;

- использование комбинаторики при решении задач;

- сложные события (алгебра событий);

- задачи на статистическую вероятность;

- задачи на геометрическую вероятность.

Ресурсы:

http://alexlarin.net/

http://reshuege.ru/

<u>Формула классической вероятности.</u>

Пример 1. Чемпионат мира по гимнастике. 40 спортсменов, из которых 10 из России, 14 – из США и остальные из Германии выступают в одной из дисциплин. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найти вероятность того, что спортсмен, выступающий первым – из Германии.

Вспомогательные формулы:

Формула классической вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где n – количество элементарных событий, а m – количество событий из них, сопутствующих событию A.

Событие A рассматривается как совокупность элементарных событий опыта.

Трудности: Выделение группы элементарных событий.

Пример 2. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «А = сумма очков равна 5»? (Ответ: 4)

Пример 3. Научная конференция идет 5 дней. Всего будет представлено 75 докладов, в первые три дня – по 17 докладов, остальные – поровну на 4 и 5 день. Распределение докладов по дням происходит в случайном порядке. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день?

Пример 4. Какова вероятность, что случайно выбранное натуральное число от 41 до 56 делится: а) на 2, б) на 3, в) на 4?

<u>Использование комбинаторики при решении задач.</u>

Трудности: подсчет количества событий.

Решение: использование комбинаторики для подсчета сложных комбинаций элементарных событий.

Пример 5. Собрание, состоящее из 30 человек, избирает делегацию из 3-х человек. Среди членов собрания 8 женщин и 22 мужчины. Какова вероятность, что в случайным образом отобранную делегацию войдут 2 мужчины и одна женщина?

Пример 6. В классе 26 человек и среди них 2 близнеца. Класс делят случайным образом на 2 группы по 13 человек в каждой. Найти вероятность того, что оба близнеца окажутся в одной группе.
Вспомогательные формулы:

Основные формулы комбинаторики:
Правило суммы: Если объект A можно выбрать $N(A)$ способами, а объект B можно выбрать $N(B)$ способами, то выбрать объект A или B можно $N(A) + N(B)$ способами.
Правило произведения: Если объект A можно выбрать $N(A)$ способами, а после каждого такого выбора объект B можно выбрать $N(B)$ способами, то выбрать пару объектов A и B можно $N(A) \cdot N(B)$ способами.
Количество перестановок из n элементов: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.
Количество размещений из n элементов по m: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.
Количество сочетаний из n элементов по m: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Статистическая вероятность.

Вспомогательные формулы:

Основная формула статистической вероятности:

$$P(A) = \omega$$

где ω – частота появления события A.

Пример 7. В среднем на 150 карманных фонариков китайского производства приходится 3 неисправных. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

Пример 8. В среднем из 1000 садовых насосов, поступающих в продажу, 5 подтекают при работе. Найти вероятность того, что случайно выбранный для покупки насос не подтекает.

Пример 9. Вероятность того, что новый ноутбук в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,091. В некотором городе из 1000 проданных ноутбуков в течение года в гарантийную мастерскую поступило 96 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе? (**Ответ:** 0,005)

Геометрическая вероятность.

Задача («бросание точки в отрезок»). При «бросании точки» в отрезок длины L найти вероятность того, что точка попадёт в интервал длины l $(l < L)$, учитывая, что вероятность попадания не зависит от местоположения отрезка l внутри L.
Формула геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{l}{L}$$

где l – длина отрезка, в который пытаются попасть «точкой», L – длина всего отрезка ($l < L$).

Задача («бросание точки в плоскую фигуру»). При «бросании точки» в плоскую фигуру площадью S найти вероятность того, что точка попадёт в фигуру площади s ($s < S$), учитывая, что вероятность попадания не зависит от местоположения и формы фигуры s внутри S. Формула геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{s}{S}$$

где s – площадь фигуры, в которую пытаются попасть «точкой», S – площадь всей фигуры ($s < S$).

Пример 10 (игра «Дартс»). Мишень для игры в «Дартс» имеет форму круга радиусом 40 см с размером центрального круга («десятка» или «яблоко») радиусом 4 см. Какова вероятность попадания в «яблоко», если учесть, что при бросании дротика он всегда попадает в мишень и что вероятность попасть в любое место мишени одинаковая? (**Ответ:** 0,01)

<u>Сложные события.</u>

Вспомогательные формулы:

Формула вероятности суммы:

несовместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$;

совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Формула вероятности произведения:

независимых событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;

зависимых событий (условная вероятность): $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Формула полной вероятности: $P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)$,

если $A = B_1A + B_2A$.

Пример 11. Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 7 задач, равна 0,78. Вероятность того, что П. верно решит больше 6 задач, равна 0,89. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 7 задач. (**Ответ:** 0,11)

Пример 12. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем. (**Ответ:** 0,6)

Пример 13. За круглый стол с 5-ю стульями в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом. (Ответ: 0,5)

Пример 14. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что:
- орел не выпадет ни разу. (**Ответ:** 0,25)
- орел выпадет ровно один раз. (**Ответ:** 0,5)
- орел выпадет только в первый раз (**Ответ:** 0,25)
- орел выпадет оба раза. (**Ответ:** 0,25)

Пример 15. Чтобы выйти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований, считая, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3. (Ответ: 0,33)

Пример 16. Производится стрельба по мишени до тех пор, пока в неё не попадут. Вероятность попадания с первого раза – 0,4, при каждом следующем выстреле – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы мишень была поражена с вероятностью 0,9?

Пример 17. Ковбой Джон попадает в муху с вероятностью 90%, если стреляет из своего пистолета, а из чужого – 30%. На столе в баре лежит 10 пистолетов, из которых два – его собственные. Ковбой Джон видит на стене муху, наугад хватает первый попавшийся пистолет и стреляет. Найти вероятность того, что Джон не промахнется.

Пример 18. Петр покупает в интернет-магазине некоторый товар. Магазинов – 2 штуки. Вероятность того, что вовремя доставят товар из 1-го магазина – 0,8, из 2-го – 0,88. Петр сделал заказ в 2-х магазинах сразу. Считая, что магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один из магазинов не доставит товар вовремя.

Пример 19. Бросают 2 игральные кости (кубики с размеченными гранями от 1 до 6). Найдите вероятность (результат округлить до сотых) того, что:
- в сумме выпадет 10 очков (Ответ: 0,08)
- в сумме выпадет менее 7 очков.

Разные задачи

Пример 1. На конференцию приехали 2 ученых из Великобритании, 2 из Испании и 4 из Швейцарии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из Испании. (**Ответ:** 0,25)

Пример 2. Вика включает телевизор. Телевизор включается на случайном канале. В это время по четырнадцати каналам из тридцати пяти показывают рекламу. Найдите вероятность того, что Вика попадет на канал, где реклама не идет. (**Ответ:** 0,6)

Пример 3. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар. (**Ответ:** 0,02)

Пример 4. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35% этих стекол, вторая – 65%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 5%. Найдите вероятность того, что случайно выбранное в магазине стекло окажется бракованным. (**Ответ:** 0,043)

Пример 5. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двух рублёвые монеты лежат в одном кармане. (Ответ: 0,4)

Пример 6. В группе туристов 6 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист К., входящий в состав группы, пойдёт в магазин? (Ответ: 0,5)

Пример 7. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом. (Ответ: 0,75)

Пример 8. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Членистоногие». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Членистоногие». (Ответ: 0,52)

Пример 9. На борту самолёта 25 мест рядом с запасными выходами и 17 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 200 мест. (Ответ: 0,21)

Пример 10. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 С, равна 0,92. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 С или выше. (Ответ: 0,08)

Пример 11. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 16 спортсменов из России, в том числе Тарас Куницын. Найдите вероятность того, что в первом туре Тарас Куницын будет играть с каким-либо бадминтонистом из России. (Ответ: 0,6)

Пример 12. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19. (Ответ: 0,38)

Пример 13. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны (в том числе, из России) участвующей в конкурсе. В первый день 10 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса? (Ответ: 0,4)

Пример 14. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых. (Ответ: 0,33)

Пример 15. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98? В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов. (Ответ: 5)

Пример 16. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет нечётной? (Ответ: 0,5)

Пример 17. В чемпионате мира участвуют 15 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:
1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5.
Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в четвёртой группе? (Ответ: 0,2)

Пример 18. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга). (Ответ: 0,027)

Пример 19. В сборнике билетов по химии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме "Алканы". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме "Алканы". (Ответ: 0,76)

Пример 20. В торговом центре два одинаковых кофе-автомата. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах. (Ответ: 0,52)

Пример 21. У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей. (Ответ: 0,1)

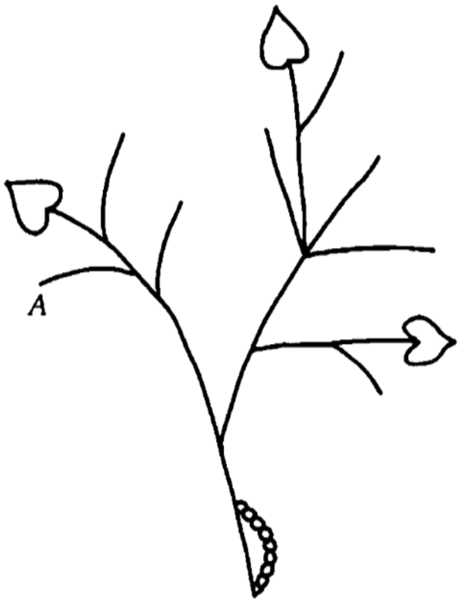
Пример 22. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течении года равна 0,3. Найти вероятность того, что в течении года:

а) хотя бы одна лампа не перегорит;

б) перегорит ровно одна лампа;

в) перегорят обе лампы.

Пример 23. Гусеница ползет вверх по ветви куста (см.рис.). На каждом разветвлении гусеница с равными шансами может попасть на любую из растущих веточек. Какова вероятность того, что гусеница попадет в точку ***A***?



Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В чемпионате мира участвуют 12 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Канады окажется в третьей группе?

Задача 2. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,09 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Задача 3. На фабрике керамической посуды 15% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Задача 4. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Космос» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Космос» начнёт игру с мячом все три раза.

Задача 5. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,1, а при каждом последующем – 0,9. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,95?

Задача 6. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

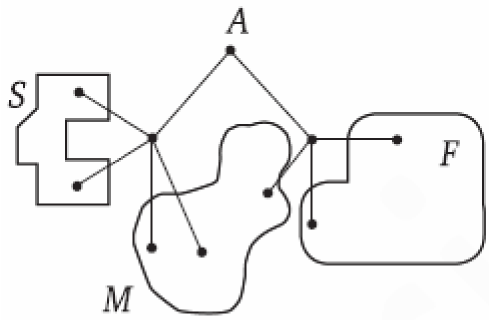
Задача 7. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,27. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Задача 8. Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит не менее двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Задача 9. В поход пошли 9 школьников: 6 мальчиков и 3 девочки. Жребий определяет двух дежурных. Какова вероятность того, что дежурить будут 1 мальчик и 1 девочка?

Задача 10. В зале театра имеется 20 рядов по 15 мест в каждом. Какова вероятность, что в случайно взятом билете номер ряда и номер места окажутся равны?

Задача 11. Петя совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Часть маршрутов приводит к поселку S, другие—в поле F или в болото M. Найдите вероятность того, что Петя забредет в болото. Результат округлите до сотых.



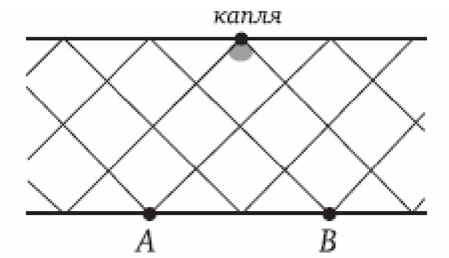
Задача 12. В одной корзине имеется 5 шаров, из которых 3 белых, 2 черных, а во второй 6 шаров – 1 белый и 5 черных. Из каждой корзины вынимают по одному

шару. Найдите вероятность того, что вынутые шары будут разного цвета. Ответ округлите до сотых

Задача 13. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и замечательная, причем погода держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такая же, как сегодня. Сегодня 3 июля, и погода в Волшебной стране замечательная. Найдите вероятность того, что 5 июля погода в Волшебной стране также будет замечательная.

Задача 14. В избирательный список внесены имена трех кандидатов: П., Н. и С. Порядок их в списке определяется случайно с помощью компьютера. Найдите вероятность того, что их имена будут расположены в списке в алфавитном порядке. Результат округлите до сотых.

Задача 15. Капля воды стекает по металлической сетке (см. рис.) В каждом узле сетки капля с равными шансами может стечь вниз вправо или влево. Найдите вероятность того, что, скатившись вниз, капля окажется в точке А.



Задача 16. Аня и Таня выбирают по одному натуральному числу от 1 до 9 независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что сумма этих чисел делится на 3. Ответ сократите до сотых.